Approximation Polynomiale des Fonctions non polynomiales

Les fonctions non polynomiales sont en général, très difficiles à évaluer, donc il faut aller chercher de l'aide à travers un outil informatique permettant ainsi de répondre à notre problème.

Fonction compliquée $\xrightarrow{\text{Approximation}}$ Fonction évaluer

$\Longleftrightarrow$

Équivalence

Fonction Linéaire

Fonction Quadratique

Fonction Cubique

Fonction Quartique

Approximation Affine

Fonction Affine c'est l'approximation de la fonction f(x) au point x=c

$$y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

Exemple :

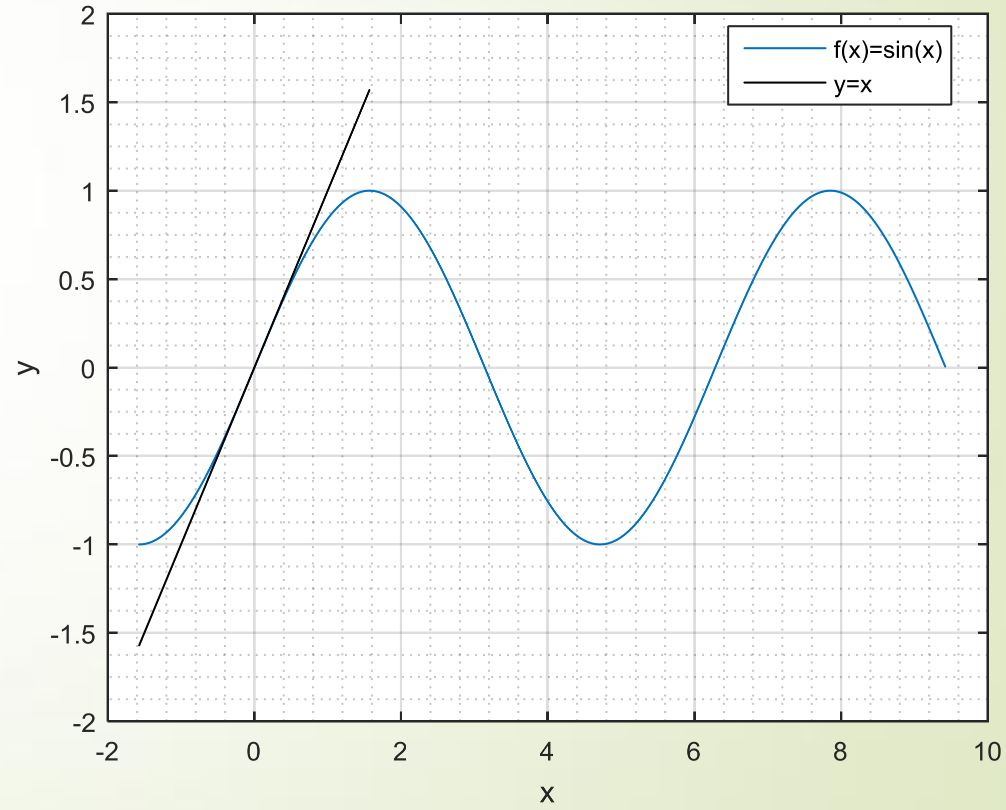
Approximation da la fonction $y = \sin x$

Au point c=0

Donc , La tangente au point $c = 0$ est : $y = x$

Au voisinage de zéro (origine)

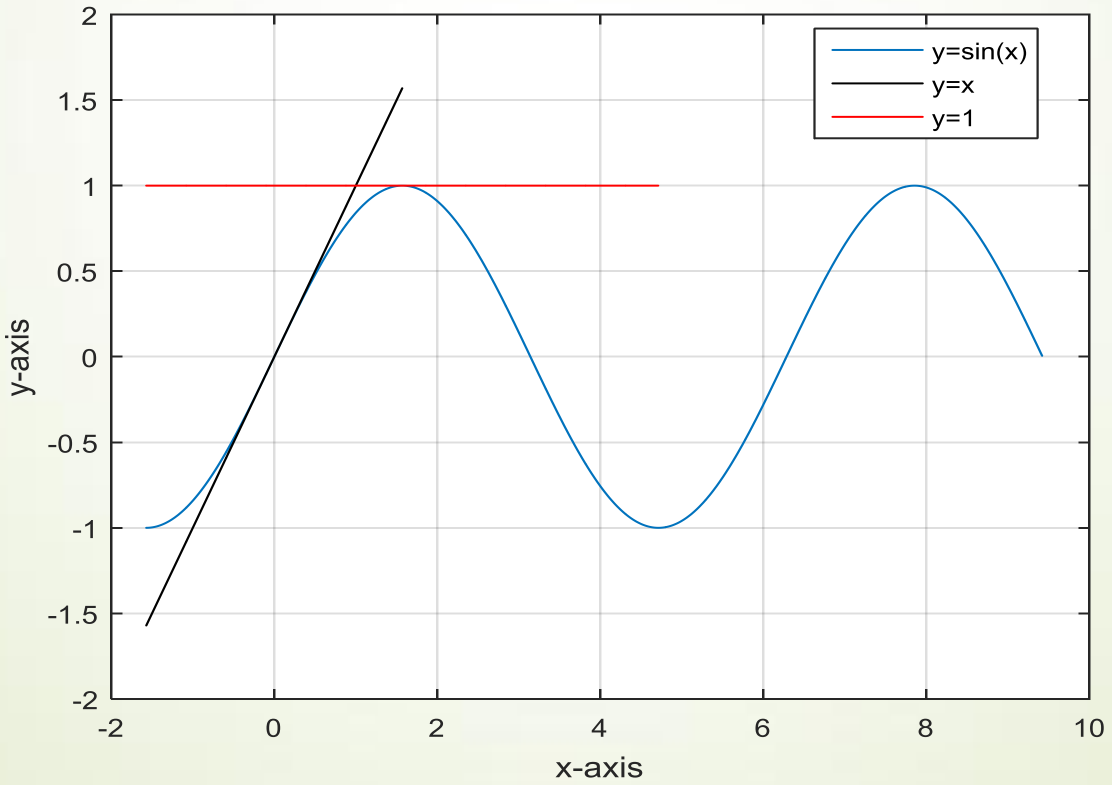
$\sin x \approx x$:est une bonne approximation



Au point $x=\frac{\pi}{2}$

Donc , La tangente au point $x=\frac{\pi}{2}$ est : $y = 1$

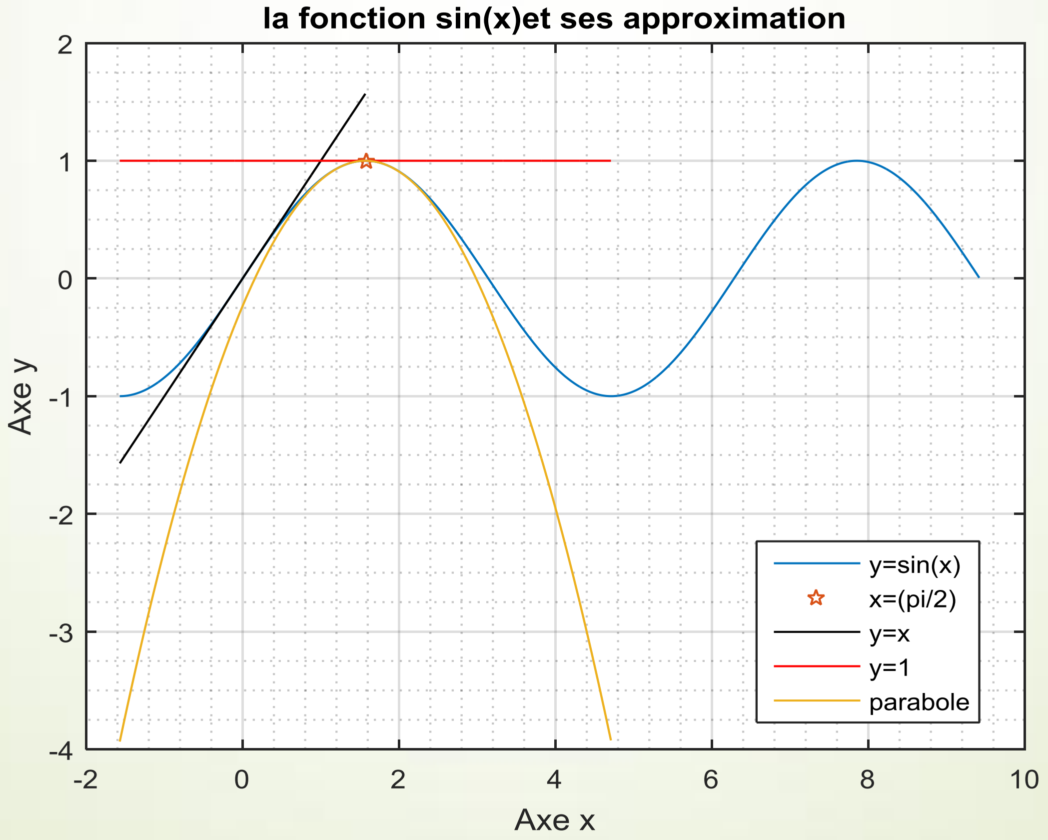
C'est une bonne approximation de la fonction sin(x) mais n'est pas bonne pour des valeurs supérieures ou inférieures à $\frac{\pi}{2}$



puisque la fonction linéaire n'est pas une bonne approximation au voisinage de $\frac{\pi}{2}$

on utilise une fonction non linéaire, du second ordre (fonction quadratique) pour une meilleure approximation.

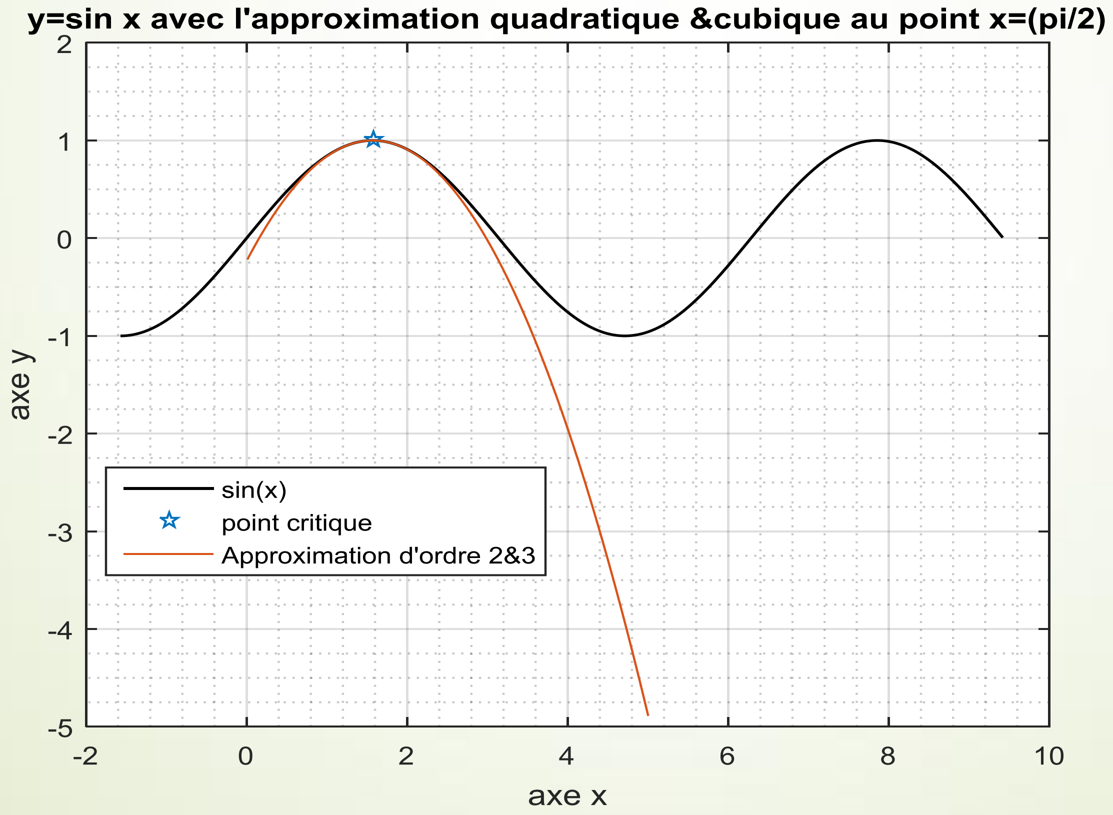
$$y = f^{(0)}(c)\cdot(x-c)^0 + \frac{f^{(1)}(c)}{1}\cdot(x-c)^1 + \frac{f^{(2)}(c)}{2}\cdot(x-c)^2$$



$$y = f^{(0)}(c)\cdot(x-c)^0 + \frac{f^{(1)}(c)}{1}\cdot(x-c)^1 + \frac{f^{(2)}(c)}{2}\cdot(x-c)^2$$

l'approximation quadratique de y=sin(x) au point x= $\frac{\pi}{2}$ est :

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\cdot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$$



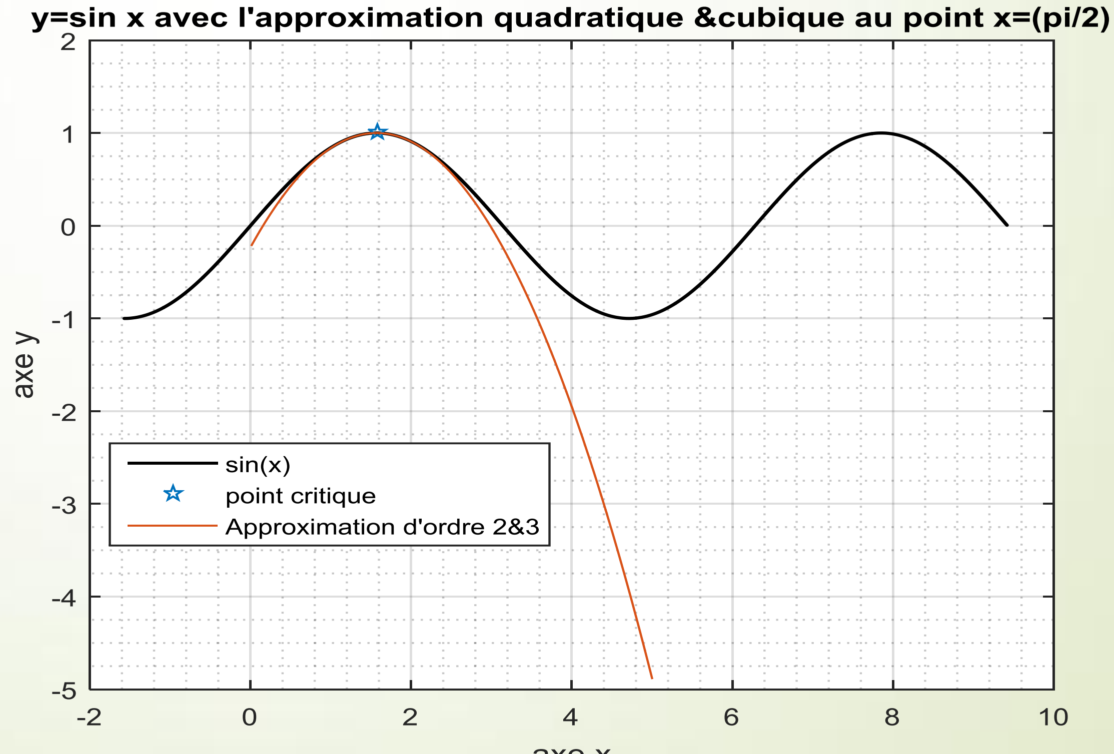
comment améliorer l'approximation polynomiale ?

on utilise l'approximation polynomiale cubique (d'ordre 3)

$$y = f^{(0)}(c)\cdot(x-c)^0 + f^{(1)}(c)\cdot(x-c)^1 + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}\cdot(x-c)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}\cdot(x-c)^3$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^1 - \frac{\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)}{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)}{3!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2$$

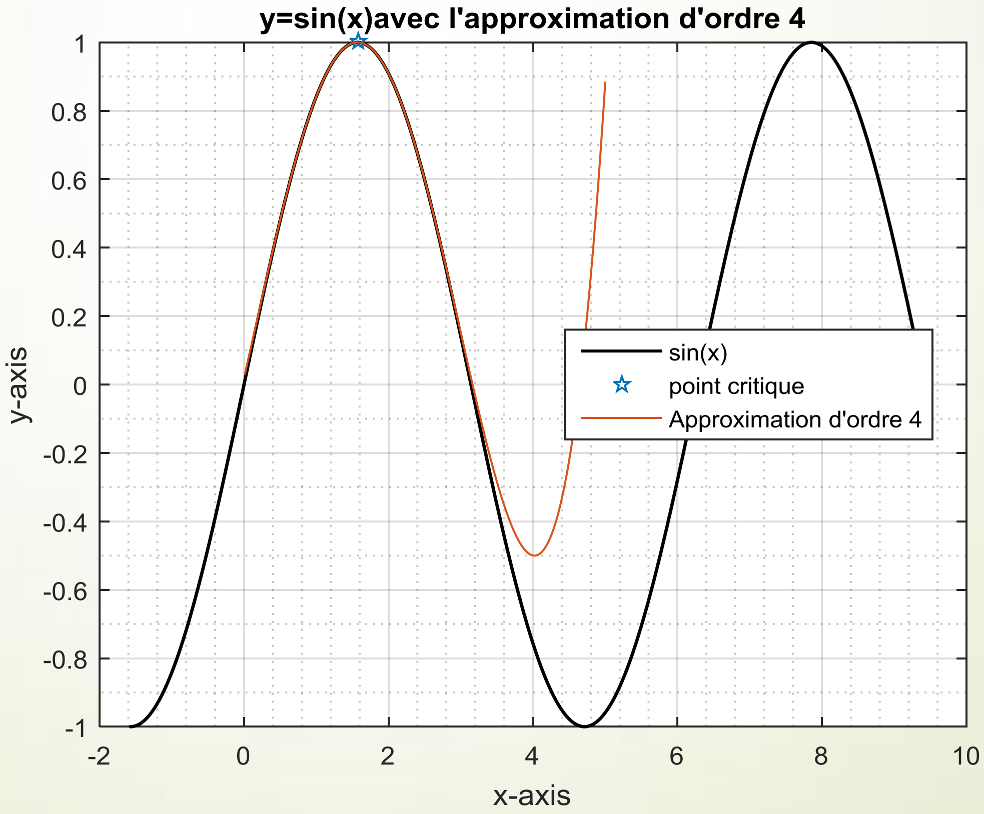


Approximation polynomiale d'ordre 4

$$y = f^{(0)}(c)\cdot(x-c)^0 + f^{(1)}(c)\cdot(x-c)^1 + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}\cdot(x-c)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}\cdot(x-c)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}\cdot(x-c)^4$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = f^{(0)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^0 + f^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^1 + \frac{f^{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4$$



Par conséquent une approximation polynomiale d'un degré supérieur est plus représentative que les précédentes.

Polynôme de Taylor

L'utilisation des approximations polynomiales est une méthode efficace quant à l'évaluation des fonctions compliquées.

$$y = f^{(0)}(c)\cdot(x-c)^0 + f^{(1)}(c)\cdot(x-c)^1 + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}\cdot(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\cdot(x-c)^k$$

le polynôme de Taylor

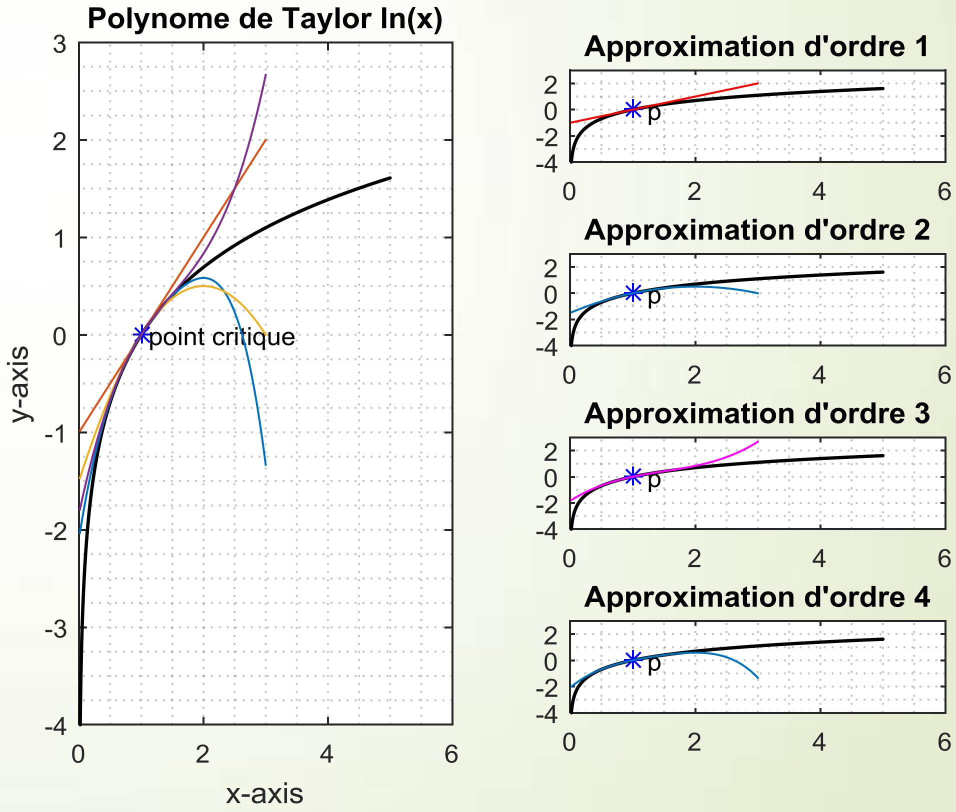
- Calculer toutes les dérivées nécessaires (l'ordre)
- Evaluer toutes les dérivées au point
- Insérer les évaluations dans le polynôme de Taylor

Exemple

Approximation de f(x)=ln(x) autour x=1

$$y = f^{(0)}(1)\cdot(x-1)^0 + f^{(1)}(1)\cdot(x-1)^1 + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}\cdot(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}\cdot(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}\cdot(x-1)^4$$

$$y = (x-1) - \frac{1}{2}\cdot(x-1)^2 + \frac{2}{6}\cdot(x-1)^3 - \frac{6}{24}\cdot(x-1)^4$$



Manuellement

$$\ln(1.2) \approx (0.2) - \frac{1}{2}\cdot(0.2)^2 + \frac{2}{6}\cdot(0.2)^3 - \frac{6}{24}\cdot(0.2)^4$$

$$\ln(1.2) \approx 0.182266...$$

Par ordinateur

ln(1.2)=0.18232155…

Polynôme de Maclaurin

Les polynômes de Taylor sont très utiles pour estimer la valeur d'une fonction compliquée, au un point quelconque.

Trouver le polynôme de Taylor au point C=0

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = f^{(0)}(0) + f^{(1)}(0) \cdot x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$$

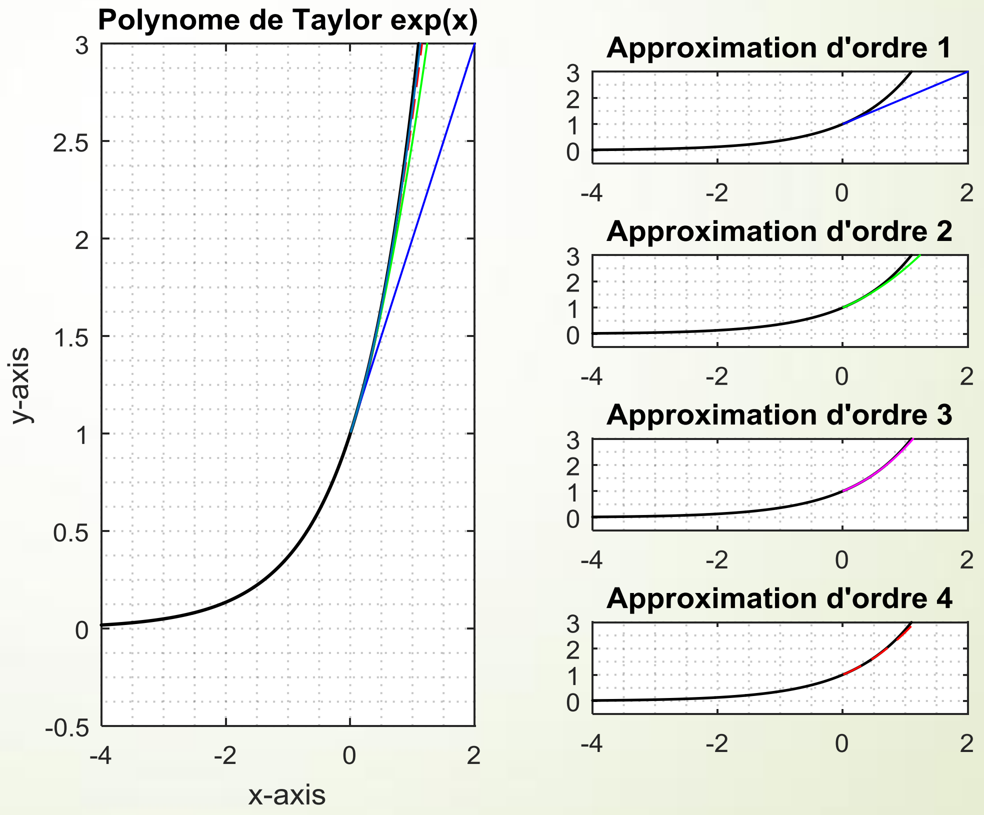
C'est le polynôme de Maclaurin

Exemple

Le polynôme de Maclaurin d'ordre 4 de la fonction f(x)=e^x

$$y = f^{(0)}(0) + f^{(1)}(0)\cdot x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\cdot x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\cdot x^4$$

$$y = 1 + x + \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{1}{24}\cdot x^4$$



Manuellement

$$e^{0.1} \approx 1+(0.1)+\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(0.1)^{2}+\left(\frac{1}{6}\right)\cdot(0.1)^{3}+\frac{1}{24}\cdot(0.1)^{4}$$

$$e^{0.1} \approx 1.1051708..$$

Par ordinateur

$$e^{0.1} = 1.1051709..$$

L’approximation de Maclaurin est réputée excellente au voisinage de x=0, et pour un intervalle considérable de valeurs positive.

le Reste de l’approximation de Taylor

Au voisinage de x=0, il y a une erreur dans l’approximation de Taylor appelé le reste $R_n(x)$ telle que : $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.

Reste (erreur) du polynôme de Taylor est :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \cdot (x-c)^{n+1}; x \leq z \leq c$$

Exemple

Pour f(x)=e^x; $c = 0$ (*Approximation de maclaurin*)

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \frac{1}{4!}\cdot x^4$$

Trouve la valeur de $e^{0.1}$

$$e^{0.1} = 1 + 0.1 + \frac{1}{2!}\cdot(0.1)^2 + \frac{1}{3!}\cdot(0.1)^3 + \frac{1}{4!}\cdot(0.1)^4$$

$$e^{0.1} \approx 1.1051708..$$

l'erreur entre la valeur $e^{0.1}$(estimée) et la valeur réelle

$$R_4(x) = \frac{e^z}{5!}\cdot(x)^5 \quad ; pour\ z\ entre\ 0 \text{ et } x = 0{,}1$$

$$R_4(0.1) = \frac{e^z}{5!}\cdot(0.1)^5 < \frac{e^{0.1}}{5!}\cdot(0.1)^5 = 9.2096665\times 10^{-8}$$