جامعة باتنة 2
الشهيد مصطفى بن بولعيد

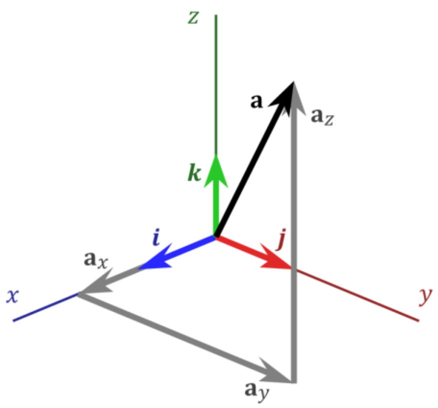
UE F112
Cours Physique 1

Mécanique du point materiel
ميكانيك النقطة المادية

Mme L. Abdelhamid

Chapitre I : Rappels mathématiques

مراجعة رياضية



- I-1 / Calcul vectoriel الحساب الشعاعي
- I-1- a / Notions sur les vecteurs مفاهيم حول الاشعة
- I-1- b / Opérations sur les vecteurs عمليات على الاشعة
- I-2 / Produit scalaire الجداء السلمي
- I-2–a/ Expression géométrique du Produit scalaire العبارة الهندسية للجداء السلمي
- I-2–b/ Expression analytique du Produit scalaire العبارة التحليلية للجداء السلمي
- I-3 / Produit vectoriel الجداء الشعاعي
- I-3–a/ Expression géométrique du Produit vectoriel العبارة الهندسية للجداء الشعاعي
- I-3–b/ Expression analytique du Produit vectoriel العبارة التحليلية للجداء الشعاعي

Chapitre I Rappels mathématiques

- I-4 / Systèmes usuels de coordonnées — الأنظمة الأساسية للإحداثيات
- I-4- a / Coordonnées Cartésiennes — الاحداثيات الديكارتية
- I-4-b / Coordonnées polaires — الاحداثيات القطبية
- I-4-c / Coordonnées cylindriques — الاحداثيات الاسطوانية
- I-4-d / Coordonnées sphériques — الاحداثيات الكروية

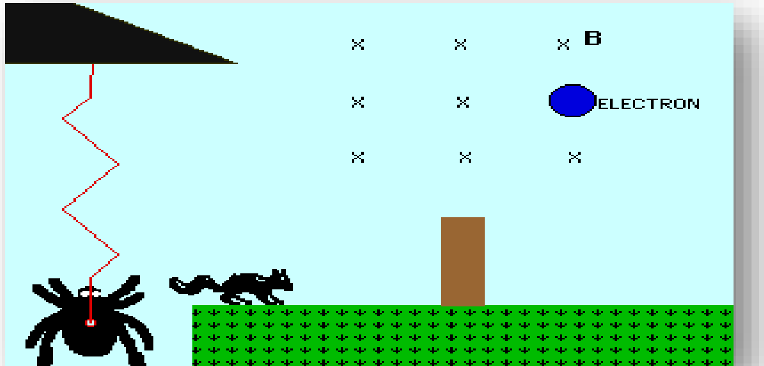
Chapitre II Cinématique du point matériel
حركيات النقطة المادية

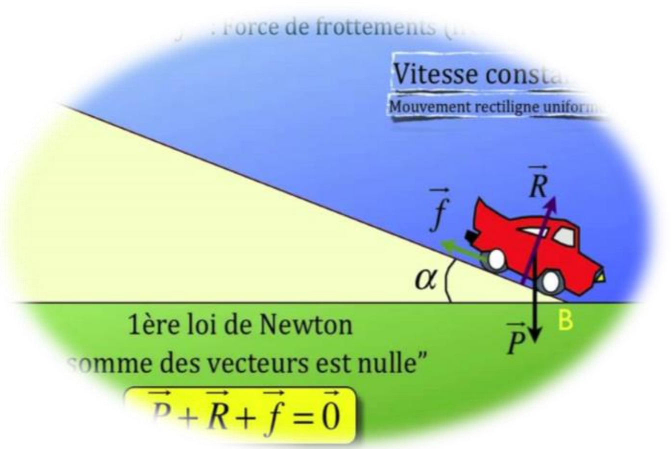
- II-1 / Généralités — مفاهيم عامة
- II-2 / Repérage d'un mobile
- II-2–a/ Vecteur position — شعاع الموضع
- II-2–b/ Vecteur vitesse — شعاع السرعة
- II-2–c/ Vecteur accélération — شعاع التسارع
- II-3/ Expression du Vecteur vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes
- II-4/ Expression du Vecteur vitesse et accélération en coordonnées polaires
- II-5/ Expression du Vecteur vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

  عبارة شعاع السرعة والتسارع في الاحداثيات الديكارتية,القطبية و الاسطوانية
- II-6/ Repère de Frenet — معلم Frenet

Chapitre III : Etude des mouvements usuels

1. Mouvement rectiligne	**الحركة المستقيمة**
1/a. Mouvement rectiligne uniforme (MRU)	الحركة المستقيمة المنتظمة
1/b. Mouvement rectiligne uniformément varié (MRUV)	الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام
2. Mouvement circulaire	**الحركة الدائرية**
2/a. Mouvement circulaire uniforme	الحركة الدائرية المنتظمة
2/b. Mouvement circulaire uniformément varié	الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام
3. Mouvement rectiligne sinusoïdal	**الحركة المستقيمة الجيبية**
4. Mouvement parabolique الحركة	





Chapitre IV : Dynamique
تحريك النقطة المادية

1. Introduction — مفاهيم
2. Systèmes étudiés et actions mécaniques — الأنظمة و الافعال الميكانيكية
3. Différents types de forces — أنواع القوى
4. Lois de Newton — قوانين نيوتن

4.a. 1ère loi de Newton (Principe d'inertie) — مبدأ العطالة

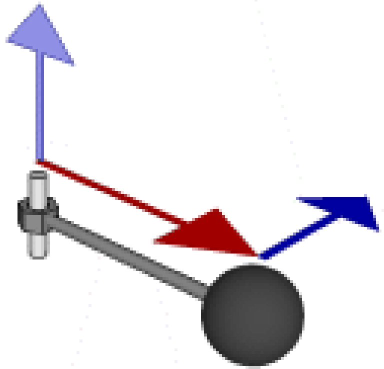
4.b. 2ème loi de Newton (Principe fondamental de la dynamique) — المبدأ الأساسي للتحريك

4.c. 3ème loi de Newton (Principe des actions réciproques) — مبدأ الفعل ورد الفعل

Chapitre IV : Dynamique
تحريك النقطة المادية

$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

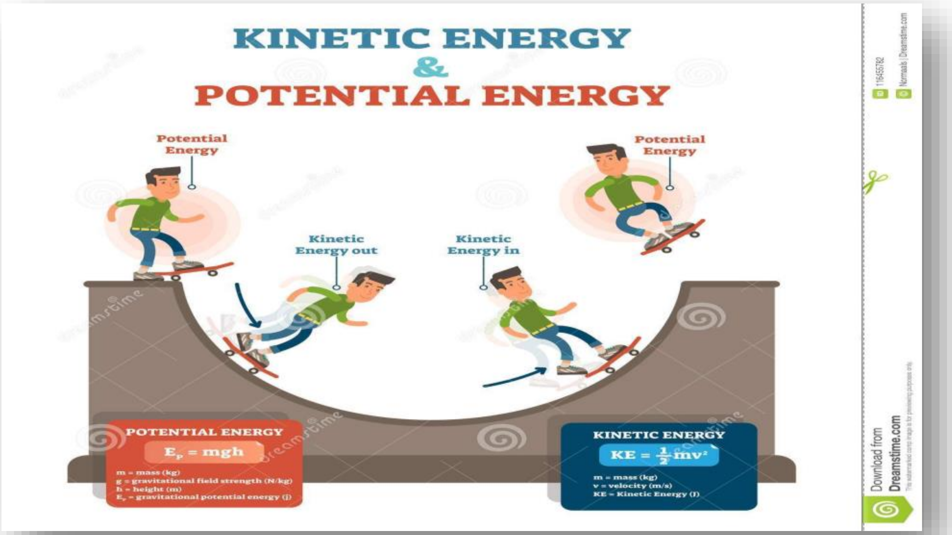
$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$



5. Application (le pendule simple) النواس البسيط
6. Moment d’une force عزم القوة
7. Moment cinétique عزم العطالة
8. Théorème du moment cinétique (TMC) نظرية العزم الحركي
9. Analogie entre grandeurs de translation et de rotation
   المقارنة بين المقادير الخطية و الدائرية

Chapitre V : Travail, Puissance & énergie
العمل, الاستطاعة و الطاقة

1. Généralités — مفاهيم عامة
2. Travail d'une force — عمل القوة
3. Puissance d'une force — الاستطاعة
4. Energie — الطاقة



Chapitre I : Rappels mathématiques

1. Calcul vectoriel
2. Produit Scalaire
3. Produit vectoriel
4. Systèmes usuels de coordonnés

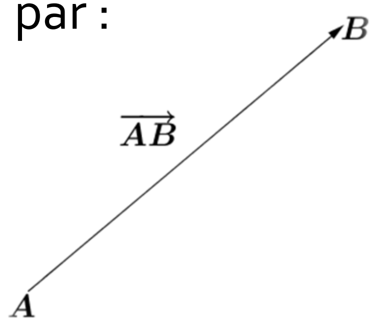
1. Calcul vectoriel

a. Notions sur les vecteurs

- Les grandeurs physiques sont décomposées en deux formes : scalaire et vectorielle.
- **1. Grandeur scalaire : مقدار سلمي**
- Une grandeur scalaire est exprimée par une valeur numérique suivie de l'unité correspondante.
- Exemple : la longueur, la masse, le volume la température ou les intervalles de temps, …. Ces quantités sont appelées grandeurs scalaires.

2. Grandeur vectorielle : مقدار شعاعي

Segment de droite AB, ayant une origine A et une extrémité B, défini par :



- ✓ Son origine (ou point d'application)
- ✓ Sa direction
- ✓ Son sens
- ✓ Sa norme (ou son module)

Exemple : le déplacement, la vitesse, la force, le champ électrique,….

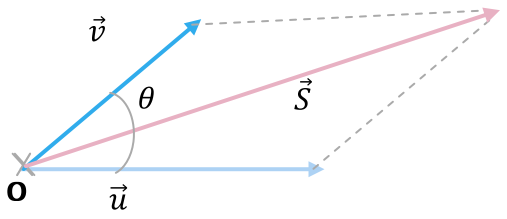
1. Calcul vectoriel

Operations sur les vecteurs : عمليات حول الاشعة

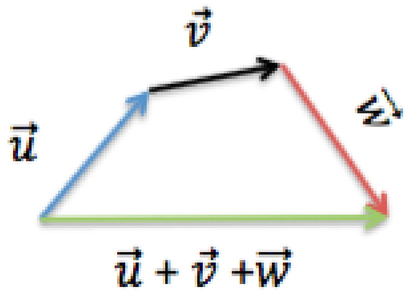
- Somme de vecteurs

• La somme (ou la résultante) de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un autre vecteur S défini par:

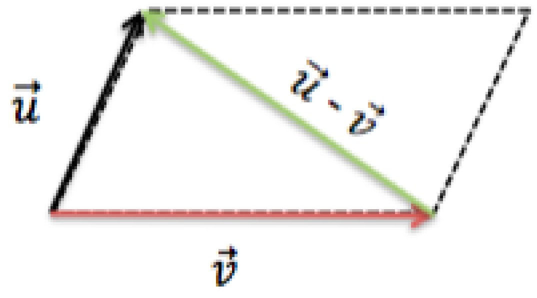
$S = \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$. Donc c'est une opération **commutative**.



- **La somme géométrique de plusieurs vecteurs :**



- Différence de vecteurs



La soustraction de vecteurs **n'est pas commutative** :

$\vec{D} = \vec{u} - \vec{v} \neq \vec{v} - \vec{u}$.

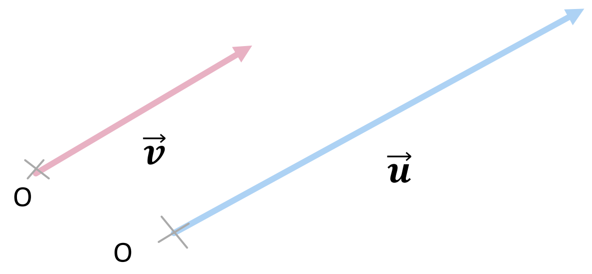
Multiplication d'un vecteur par un scalaire

- Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par un scalaire α est un vecteur noté $\alpha\vec{u}$.

$$(\alpha + \beta)\,\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$$

- Notons que deux vecteurs sont colinéaires (parallèle) si et seulement s'ils sont proportionnels c'est-à-dire s'il existe un nombre α tel que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}$$



Composantes et norme d'un vecteur

- Soit A et B deux points dans un repère cartésien A(x_a , y_a) et B(x_b ,y_b) alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour coordonnées

$$< x_b - x_a \, , \, y_b - y_a > \quad \text{ou bien:} \quad \begin{pmatrix} x_b - xa \\ y_b - yb \end{pmatrix}$$

- Le vecteur s'écrit

$$\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a)\,\vec{i} + (y_b - y_a)\,\vec{j} = a\,\vec{i} + b\vec{j}$$

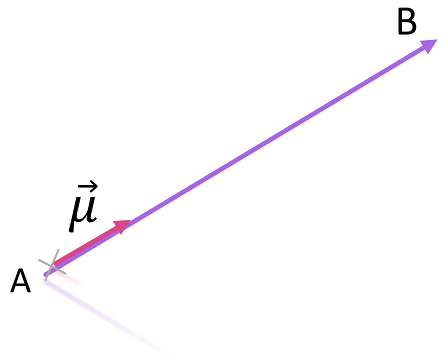
- La norme ou le module du vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Vecteur unitaire شعاع الوحدة

- Le vecteur unitaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le rapport de ce vecteur sur le module de celui-ci.

$$\vec{\mu} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$



I-2 Produit scalaire الجداء السلمي

a/ Expression géométrique du Produit scalaire

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs faisant un angle géométrique θ, on appelle produit scalaire et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le nombre réel (scalaire) :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$$

- C’est le produit du module de $\|\vec{v}\|$ par la projection de $\vec{u}$ sur la direction de $\vec{v}$ $(\|\vec{u}\| \cos\theta)$.

b/ Expression analytique du Produit scalaire

العبارة التحليلية للجداء السلمي

Si $\vec{u}$ = <X, Y, Z > et $\vec{v}$ = <X', Y', Z'> alors l'expression analytique du produit scalaire $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ est donné par :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = XX' + YY' + ZZ'$$

En effet,

$$(X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}).(X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k}) = XX' + YY' + ZZ'$$

Puisque :

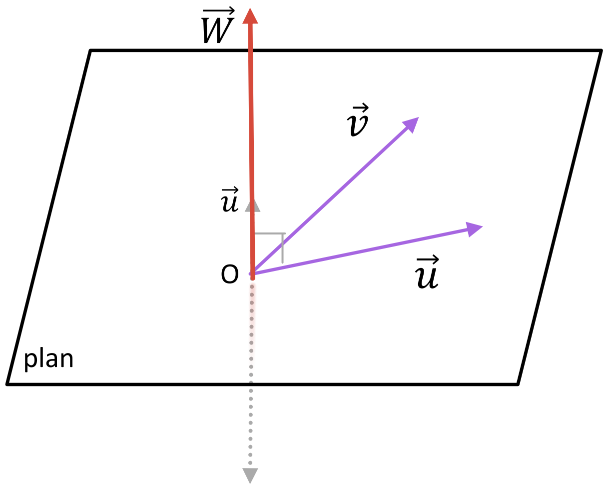
$$\vec{i}\,.\,\vec{i} = \vec{j}\,.\,\vec{j} = \vec{k}\,.\,\vec{k} = 1 \qquad \text{et que} \qquad \vec{i}\,.\,\vec{j} = \vec{j}\,.\,\vec{k} = \vec{k}\,.\,\vec{i} = \vec{k}\,.\,\vec{j} = \vec{i}\,.\,\vec{k} = 0$$

I-3 / Produit vectoriel الجداء الشعاعي

a- Expression géométrique du Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est un vecteur perpendiculaire au plan formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et defini par :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\theta.\vec{\mu}$$



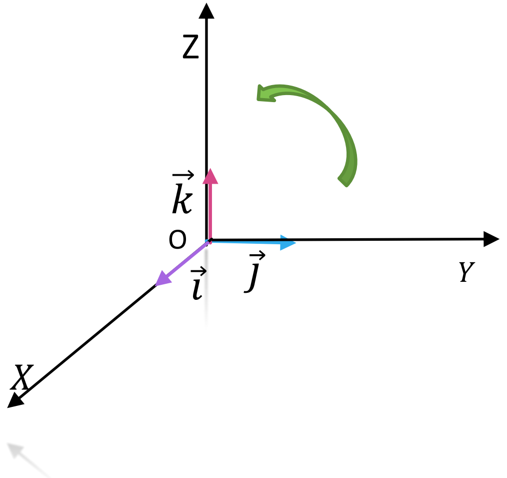
b/ Expression analytique du Produit vectoriel

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,) \wedge (\,x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

$$= (\,yz' - zy')\vec{i} - (xz' - x'z)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}$$

Tels que:

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \;\; ; \;\; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \;\; ; \;\; \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$



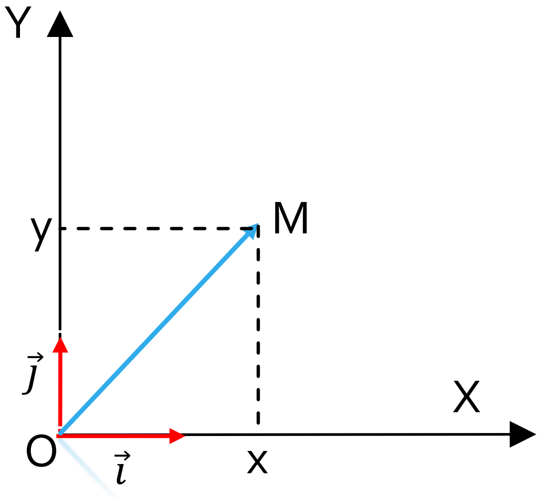
-Méthode matricielle :

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{bmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$$

$$= (yz' - zy')\vec{i} - (xz' - x'z)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}$$

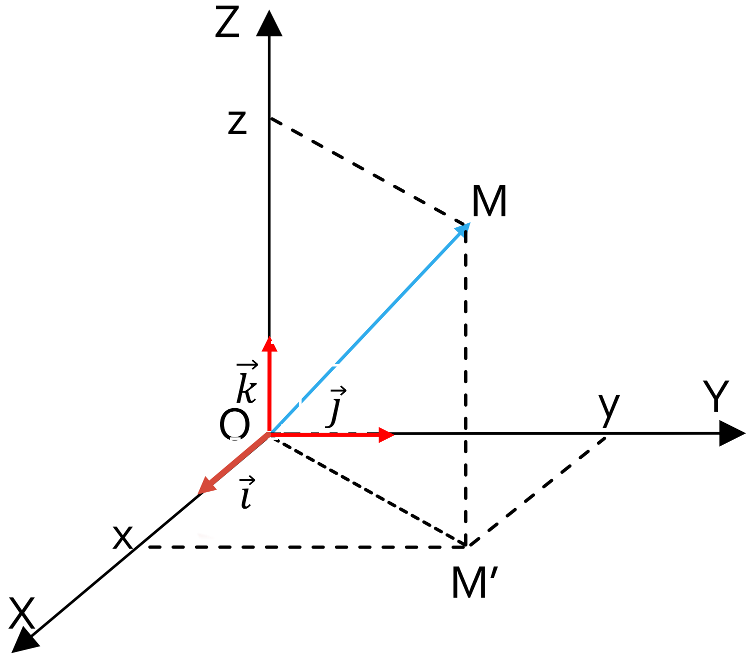
I-4 / Systèmes usuels de coordonnées

a / Coordonnées Cartésiennes



$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

dans le plan



$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

dans l'espace

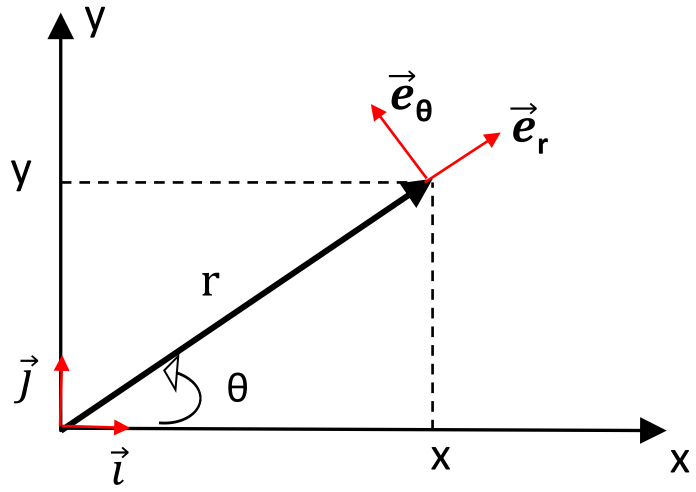
b/ Coordonnées polaires

M (r ,θ) $\Rightarrow$ la base polaire est $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

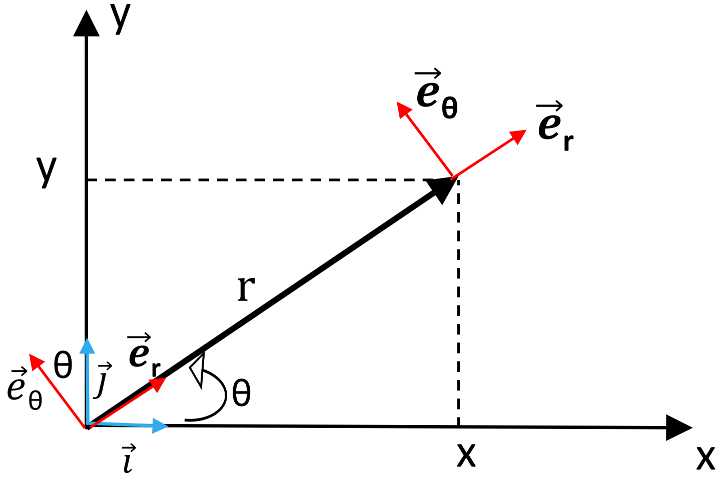
$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

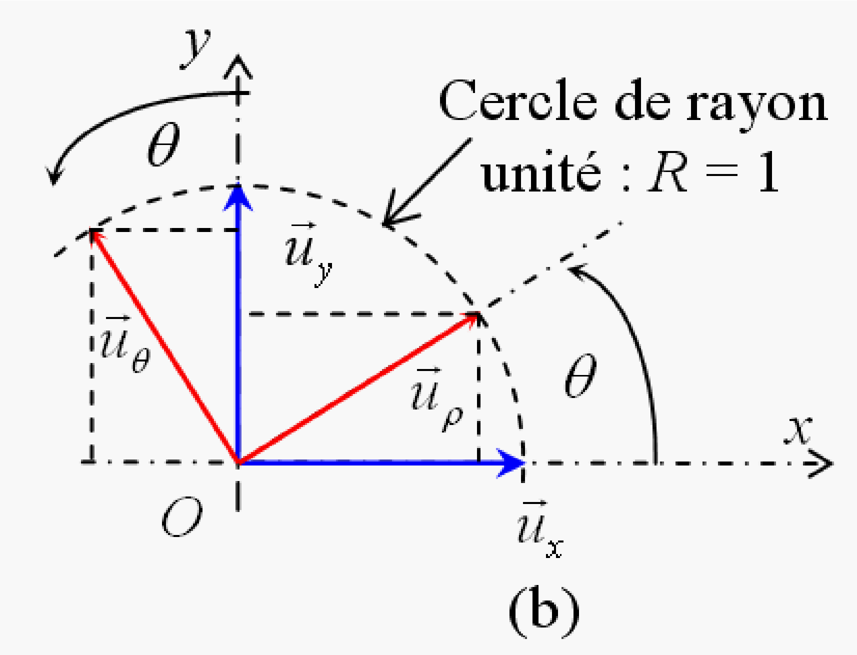
Les coordonnées polaires sont liées aux coordonnées cartésiennes par :

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$



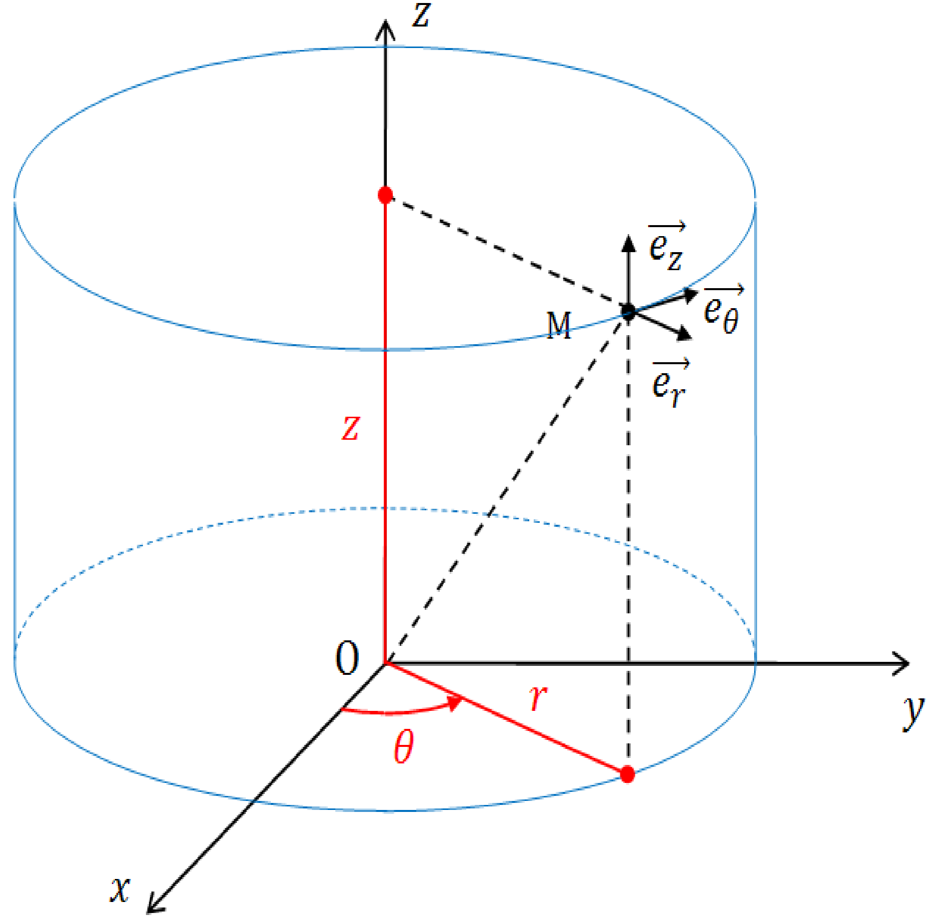
$$\vec{e}_r = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}$$
$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j}$$





c / Coordonnées cylindriques

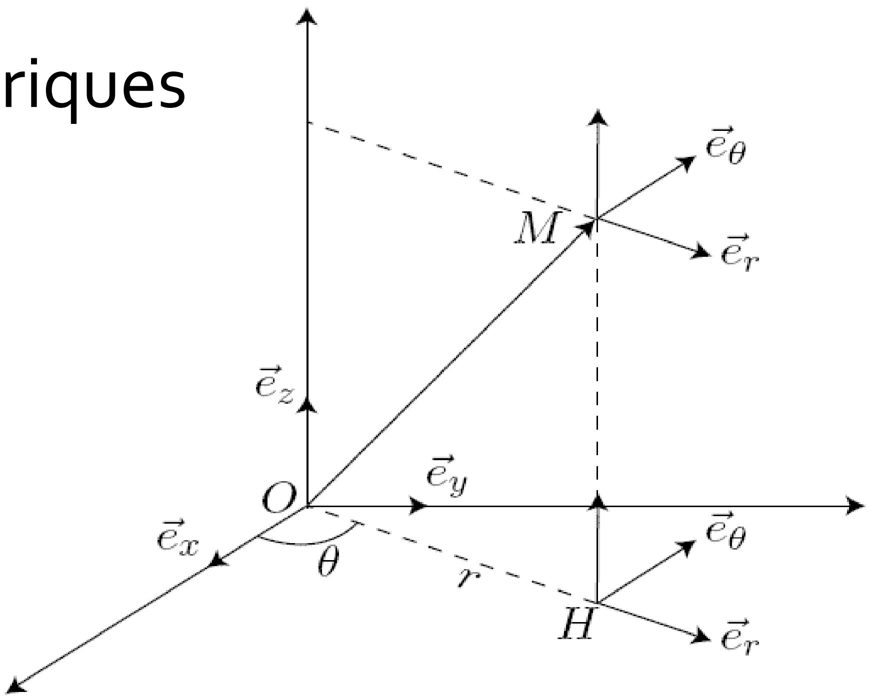
M (r ,θ, z) ⟹ la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.



Les coordonnées cylindriques sont liées aux coordonnées cartésiennes :

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \\ z = z \end{array}\right.$$

Le vecteur position en coordonnées cylindriques est donné par :

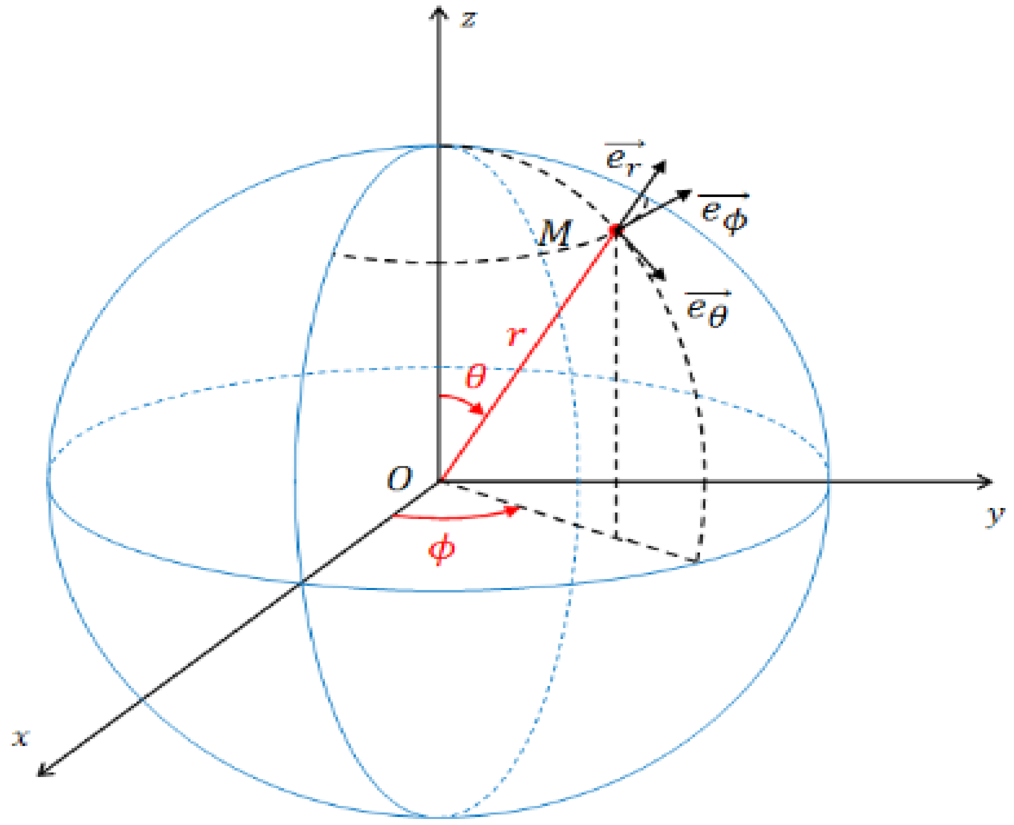


$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$$

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\,\vec{e}z$$

d / Coordonnées sphériques

M (r, θ, ϕ) ⇒ la base sphérique est $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$



M (r, θ, ϕ) ⟹ la base sphérique est ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$).

Les coordonnées sphériques sont liées aux coordonnées cartésiennes par :

$$\begin{cases} x = OH\cos\varphi \\ y = OH\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \text{avec } OH = r\sin\theta \qquad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Le vecteur position du point M dans la base sphérique est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

Chapitre II : Cinématique du point matériel

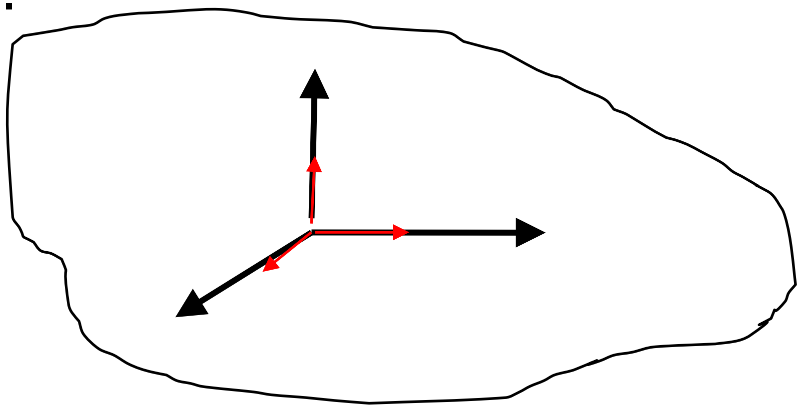
1. Généralités
2. Repérage d'un mobile
3. Expression du Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes
4. Expression du Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes
5. Expression du Vecteur vitesse en coordonnées polaires
6. Expression du Vecteur accélération en coordonnées polaires
7. Expression du Vecteur vitesse en coordonnées cylindriques
8. Expression du Vecteur accélération en coordonnées cylindriques
9. Repère de Frenet

II-1 / Généralités

- Le mot cinématique provient du mot grec « Cinéma » qui veut dire mouvement.
- La cinématique est l'étude du mouvement d'un solide, en déterminant sa position, sa vitesse et son accélération.
- La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie et décrit le mouvement d'un objet considéré comme infiniment petit qu'on appelle point matériel on le note M, sa masse est m.

II-2 / Repérage d'un mobile

- L'ensemble des points décrit par le point M au cours du temps est appelé trajectoire.
- Sur sa trajectoire le point M a une vitesse $\vec{V}$ et une accélération $\vec{a}$.
- Pour étudier le mouvement d'un point on se donne un repère et pour cela on définit un référentiel ou un espace.

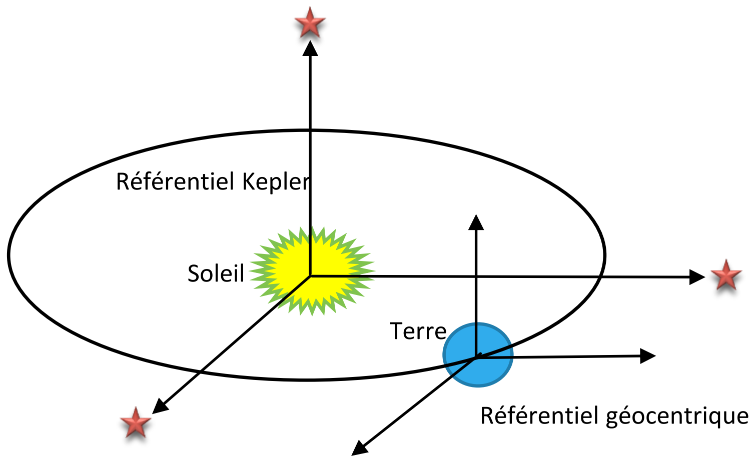


- On appelle repère un ensemble de points dont les distances sont invariables au cours du temps ,on le caractérise généralement par un point o origine du repère choisi conventionnellement et muni d' une base orthonormée.

- Pour définir la position d'un point dans l'espace un observateur utilisera un repère , système de coordonnées qui lui est lié à une horloge pour mesurer le temps

- Ce repère espace-temps est appellé réferentiel

- Le référentiel terrestre est le référentiel le plus utilisé : il est centré en un point de la Terre, et ses axes sont liés à la rotation terrestre .
- Le référentiel géocentrique a pour origine le centre de masse de la Terre et ses axes sont définis par rapport à trois étoiles suffisamment lointaines pour sembler immobiles. Ainsi, il n'est pas solidaire de la Terre dans son mouvement de rotation autour de l'axe de ses pôles.
- Le référentiel de Kepler (ou héliocentrique) est le référentiel centré sur le centre de masse du Soleil et dont les axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic .



a/ Vecteur position

- Le vecteur position est donné dans les différents systèmes de coordonnée:
- Coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- Coordonnées polaires $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$
- Coordonnées cylindriques $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$
- Coordonnées sphériques $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$

L’équation de la trajectoire

- La relation mathématique qui relie les coordonnées indépendamment du temps est appelée l’équation de la trajectoire $y = f(x)$ ou $r = f(\Theta)$

Exemple l’équation d’un cercle est : $X^2 + Y^2 = R^2$

- Equation paramétrique ou Equation horaire : ce sont les relations qui nous donnent les distances en fonctions du temps

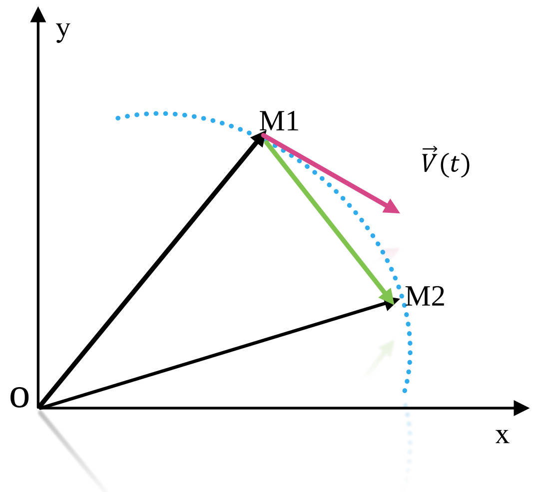
$$X = f(t) \quad ; \quad y = g(t) \quad ; \quad z = h(t);$$

b/ Vecteur vitesse

- La vitesse est une grandeur vectorielle qui donne des informations sur l'évolution de la position d'un point par rapport au temps, son unité m / s.
- Elle doit exprimer la direction instantanée du déplacement du point, le sens du déplacement ainsi que l'amplitude de la variation de ce déplacement.
- La vitesse est une grandeur vectorielle dont la direction est tangente à la trajectoire.

Vitesse moyenne : c'est la distance parcourue par unité de temps

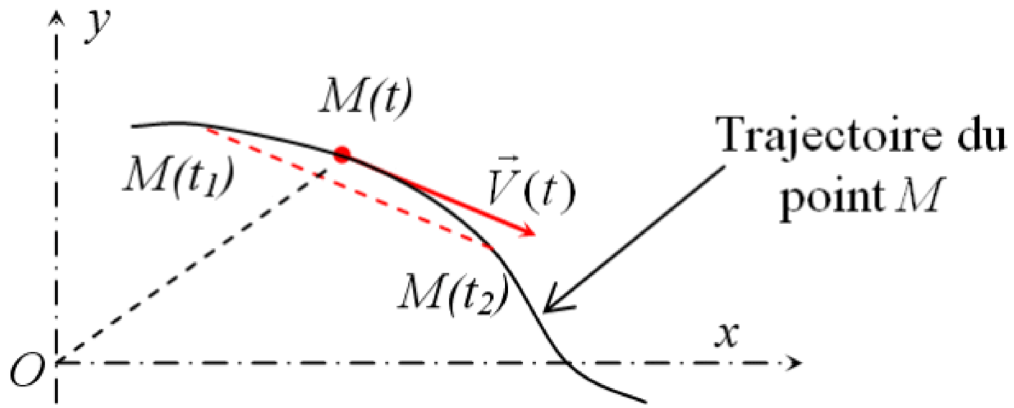
$$\vec{V}m = \frac{\overrightarrow{M1M2}}{t2-t1} = \frac{\overrightarrow{OM2} - \overrightarrow{OM1}}{\Delta t}$$



Vitesse instantanée : c'est la vitesse à un instant t, elle peut se définir comme une vitesse moyenne entre la position M_1 du point à l'instant t et la position M_2 de ce même point à l'instant (t + Δt) ou Δt représente une durée très faible.

$$\vec{V}(t) = lim \frac{\overrightarrow{OM}\ (t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}\ (t)}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

La vitesse moyenne d'un point M tend vers la vitesse instantanée à la date t lorsque Δt tend vers 0. Lorsque M2 tend vers M1, la corde M1 M2 tend vers la tangente à la trajectoire au point M d'où le vecteur vitesse est un vecteur tangent à la trajectoire au point considéré.

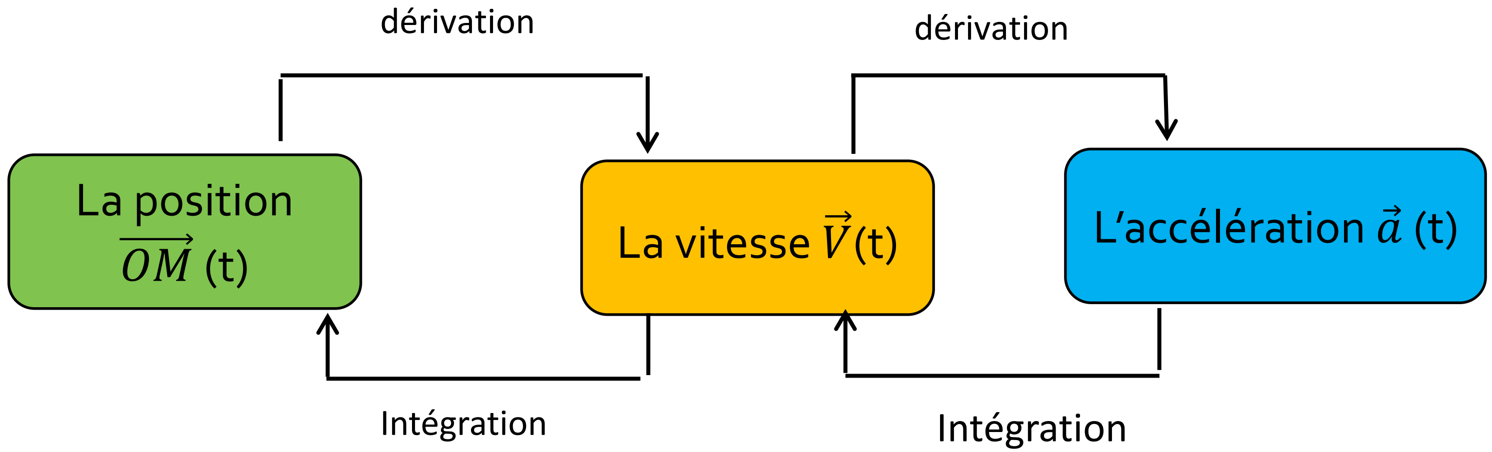


c/ Vecteur accélération

- Tout comme le vecteur vitesse nous renseigne sur la variation du vecteur position par rapport au temps, le vecteur accélération nous renseigne sur les variations du vecteur vitesse par rapport au temps.
- Le vecteur accélération représente donc la dérivée première par rapport au temps du vecteur vitesse ou bien la dérivée seconde du vecteur position.

$$\vec{a}(t) = \lim_{t' \to t} \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t' - t} = \lim_{t' \to t} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} ; \ \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

Les trois équations horaires, qui sont la position $\overrightarrow{OM}$ (t), la vitesse $\vec{V}$ (t) et l'accélération $\vec{a}$ (t), sont des fonctions au sens mathématique qui peuvent se déduire les unes des autres par dérivation et intégration.



II- 3 /Expression du Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

- Le vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$\vec{V}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{V}(t) = V_x\vec{i} + V_Y\vec{j} + V_Z\vec{k} \qquad \vec{V}(t) = \dot{X}\vec{i} + \dot{Y}\vec{j} + \dot{Z}\vec{k}$$

- La base cartésienne étant une base fixe au cours du temps, ses vecteurs unitaires sont donc indépendants du temps et leur dérivée par rapport au temps est nulle.

II-4/Expression du Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

- Le vecteur accélération en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j} + V_z\,\vec{k})$$

La base cartésienne étant une base fixe au cours du temps, ses vecteurs unitaires sont donc indépendants du temps et leur dérivée par rapport au temps est nulle.

$$\vec{a}(t) = a_x\,\vec{\imath} + a_Y\,\vec{\jmath} + a_Z\,\vec{k} \qquad \vec{a}(t) = \ddot{X}\,\vec{\imath} + \ddot{Y}\,\vec{\jmath} + \ddot{Z}\,\vec{k}$$

II-5/ Expression du Vecteur vitesse en coordonnées polaires

- $\vec{V}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ avec $\overrightarrow{OM}$ en Coordonnées polaires $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$
- $\vec{V}(t) = \dfrac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \dot{r}\ \vec{e}_r + r\dfrac{d}{dt}\vec{e}r$

Rappel mathématique:

Règle de dérivation d'une fonction composée :

Si on a f =f(y) et y= f (x) alors on a :

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Dans notre cas y est l'angle θ et x représente le temps .

- Donc : $\frac{d}{dt}\vec{e}_r = \frac{d}{d\theta}\vec{e}_r \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\ \frac{d}{d\theta}\vec{e}_r$ Avec :
- $\vec{e}_r = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}$; $\frac{d\vec{e}r}{d\theta} = -\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j} = \vec{e}_\Theta$
- $\vec{e}_\Theta = -\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j}$; $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = = -\cos\theta\ \vec{i} - \sin\theta\ \vec{j} = -\vec{e}_r$
- $\frac{d}{dt}\vec{e}_r = \dot{\theta}\ \vec{e}_\Theta$ et : $\frac{d}{dt}\vec{e}_\theta = -\dot{\theta}\ \vec{e}_r$

- Et donc l'expression de la vitesse en coordonnées polaires Devient :

$$\vec{V}(t) = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \dot{r}\ \vec{e}_r + r\frac{d}{dt}\vec{e}_r$$

$$\boldsymbol{\vec{V}(t) = \dot{r}\ \vec{e}_r + r\dot{\theta}\ \vec{e}_\Theta}$$

II-6/Expression du Vecteur accélération en coordonnées polaires

- $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\dot{r}\ \vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\Theta)$
- $\vec{a}(t) = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dfrac{d}{dt}\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\Theta + r\,\ddot{\theta}\,\vec{e}_\Theta + r\,\dot{\theta}\,\dfrac{d}{dt}\vec{e}_\theta$
- $\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r + (2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\vec{e}_\theta$

II-7 Expressions des vecteurs de position et vitesse en coordonnées cylindriques :

- **vecteur position :** $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$ ou $\vec{e}_z = \vec{k}$

  vecteur vitesse : $\vec{V}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

$\rightarrow \quad \vec{V}(t) = \dfrac{d}{dt}(r.\vec{e}_r + z\vec{k}) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dfrac{d}{dt}\vec{e}r + \dot{z}\,\vec{k}$

avec : $\dfrac{d}{dt}\vec{e}_r = \dot{\theta}\,\vec{e}_\Theta$ *et* $\dfrac{d}{dt}\vec{e}_\vartheta = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r$

Donc l'expression de la vitesse en coordonnées cylindriques est :

$$\vec{V}(t) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\Theta + \dot{z}\,\vec{k}$$

Vecteur accélération :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\ \vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\ \vec{e}_\Theta) = \ddot{r}\ \vec{e}_r + \dot{r}\,\frac{d}{dt}\vec{e}_r + \dot{r}\ \dot{\theta}\ \vec{e}_\Theta + r\,\ddot{\theta}\ \vec{e}_\Theta$$

$$+ r\,\dot{\theta}\ \frac{d}{dt}\vec{e}_\vartheta + \ddot{z}\,\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r + (2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\vec{e}_\vartheta + \ddot{z}\vec{k}$$

II-9/Repère de Frenet

C’est un repère mobile orthonormé (M , T, N)
T étant un vecteur unitaire tangent à la trajectoire
N étant un vecteur unitaire normal à la trajectoire, dirigée vers le centre de courbure de la trajectoire.
En tout point de la trajectoire , on peut définir un cercle(localement une portion de courbe, ressemble toujours, plus ou moins à un cercle) , de rayon R , rayon de courbure de la trajectoire.

$\vec{V} = V\,\vec{u}_T$	$\vec{V}$ **est tangent à la trajectoire**
$\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{dv}{dt}\vec{u}_T + \dfrac{v^2}{R}\vec{u}_N$	$\vec{a}$ **est dirigé vers l'intérieur de la trajectoire**

- $a_T = \dfrac{dv}{dt}$ est la valeur de l'accélération tangentielle,
- Elle peut être positive, négative ou nulle.
- $a_N = V^2/R$ est la valeur de l'accélération normale.
- Elle peut être positive ou nulle.
- R est le rayon de courbure de la trajectoire.
- $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$ d'où $a^2 = a_n^2 + a_t^2$

Chapitre III : Etude des mouvements usuels

1. Mouvement rectiligne
2. Mouvement rectiligne uniforme (MRU)
3. Mouvement rectiligne uniformément varié (MRUV)
4. Mouvement circulaire
5. Mouvement circulaire uniforme
6. Mouvement circulaire uniformément varié
7. Mouvement rectiligne sinusoïdal
8. Mouvement parabolique

Mouvements Rectilignes :(الحركات المستقيمة)

Un point matériel M est en mouvement rectiligne si sa trajectoire est une droite dans le référentiel $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ confondue sur un seul axe de cette référence ou s'effectue le mouvement de point M. Donc nous n'avons besoin que d'un seul paramètre pour définir la position du point M (ox par exemple)

1-1- Mouvement rectiligne uniforme (MRU) : (الحركة المستقيمة المنتظمة)

Un point matériel est en mouvement rectiligne uniforme si sa trajectoire est une droite et son vecteur vitesse constant $V=V_0=\dot{X}$ = constante, donc son vecteur accélération est nul ($a = \frac{dv}{dt} = 0$).

Equation horaire du mouvement :

on choisit l'axe OX comme repère rectiligne.

On a : $V=V_0=\dot{X}$ = constante donc $\vec{V}(t) = V_0\vec{i}$

$$\rightarrow V = V_0 = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = V_0 dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} x = \int_0^t V_0 dt$$

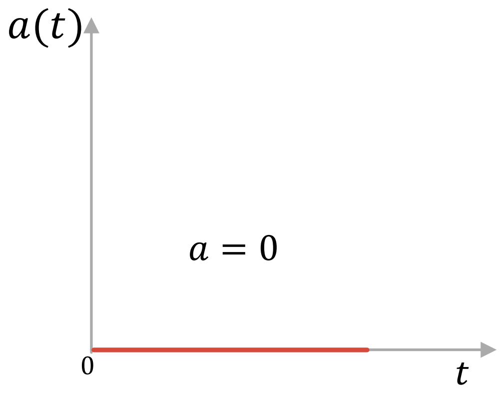
$\Rightarrow$ $\boldsymbol{x(t) = V_0 t + x_0}$ est l'équation horaire du mouvement rectiligne uniforme.

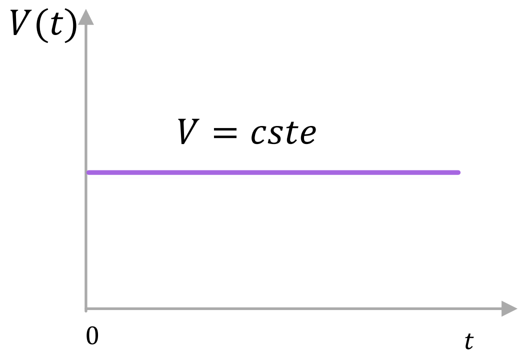
Avec x_0 est une constante d'intégration qui se détermine à partir des conditions initiales.

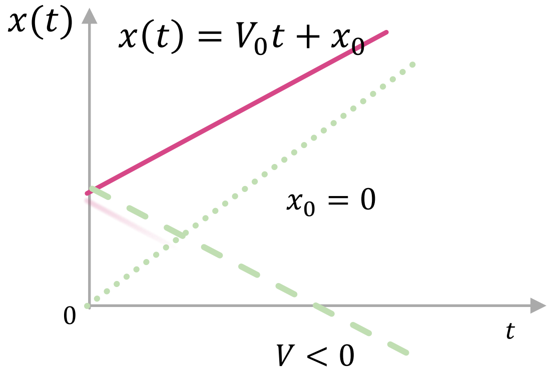
Diagrammes du mouvement مخططات الحركة

- l'accélération : a = 0 m/s², - la vitesse : $V=V_0$= cste

et le déplacement en fonction du temps : $x(t) = V_0 t + x_0$







Mouvement rectiligne uniformément varie (MRUV)
(الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام)

- Le mouvement d'un point matériel est rectiligne uniformément varié si sa

trajectoire est une droite et son accélération est constante. $\vec{a} = a_0\vec{\imath} = cste$

- En considérant les conditions initiales (t=o, V(o)= V_0).
- $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow d\vec{V} = a_0\vec{\imath}\,dt \Rightarrow \int_{V_0}^{V} d\vec{V} = \int_0^t a_0\vec{\imath}\,dt$
- $\Rightarrow \vec{V}(t) = (a_0\,t + V_0)\vec{\imath}$
- On obtient alors l'équation de la vitesse instantanée : $V(t) = (a_0\,t + V_0)$

Equation horaire du mouvement :

- Si on prend aussi les conditions initiales (pour t=o, $x(0) = x_0$ et V(o) = V_0).

et partant de l'équation : $V(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx(t) = \int_0^t V(t)dt$

$= \int_0^t (a_0\, t + V_0)dt$

- L'équation horaire est donc : $x(t) = (\frac{1}{2}a_0 t^2 + V_0 t + x_0)$

Donc les équations du MRUV : $\begin{cases} a = a_0 = cste \\ V(t) = (a_0\, t + V_0) \\ x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + V_0 t + x_0 \end{cases}$

Le mouvement rectiligne uniformément varié est soit accéléré ou décéléré (retardé).
Le mouvement est uniformément accéléré si le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$ est positif
Le mouvement est uniformément décéléré si le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$ est négatif
Le signe de l'accélération $\vec{a}$ ne suffit pas.

- Il est possible d'obtenir une relation entre position, vitesse et accélération indépendamment du temps.

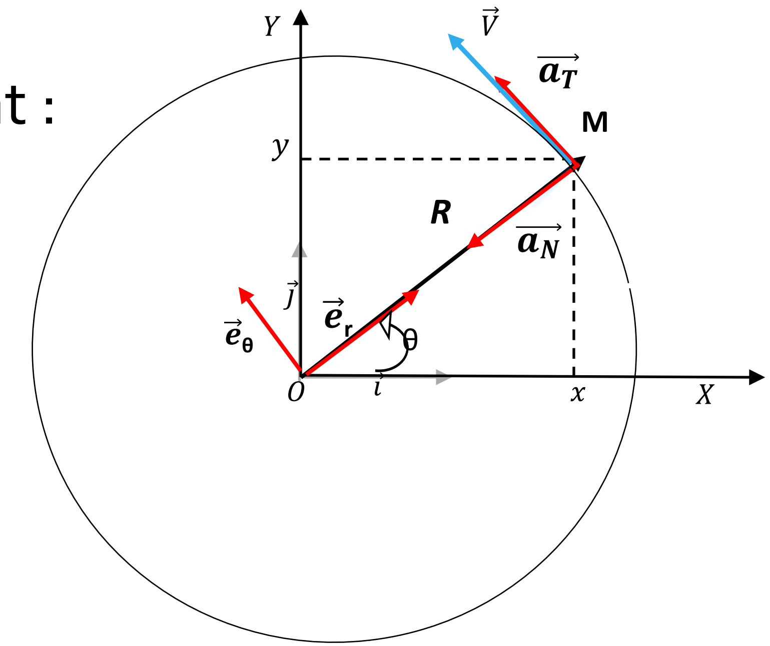
$$V = a_o t + v_o \Rightarrow t = (v - v_o) / a_o$$

- En remplaçant t par son expression dans l'équation horaire x(t) on obtient :

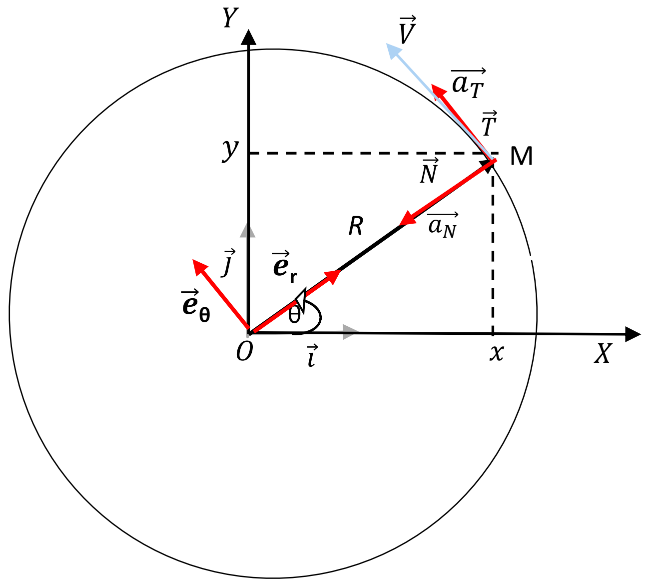
$$2 a_o (x - x_o) = v_f^2 - v_0^2$$

Mouvement circulaire

- Dans un mouvement circulaire la trajectoire du point M est un cercle de centre O , et de rayon r, il est logique de choisir l'origine du repère le centre O du cercle, le système de coordonnés polaires est bien adapté pour ce type de mouvement.
- Avec r = constante et $\theta = f(t)$
- Les équations du mouvement s'écrivent :
- $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$
- $\vec{V}(t) = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = r\frac{d}{dt}\vec{e}_r = r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$
- $\vec{a}(t) = -\,r\,\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r + r\,\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta$



Comparaison entre les deux expressions de l'accélération du MC dans la base de Frenet et dans la base polaire.



- Repère de Frenet : $\vec{a} = a_T.\vec{T} + a_N.\vec{N}$
- $a_T = \frac{dv}{dt}$ et $a_N = \frac{v^2}{R}$ Avec : $\vec{N} = -\overrightarrow{e_r}$ et $\vec{T} = \overrightarrow{e_\theta}$
- MC base polaire : $\vec{a} = \mathrm{R}\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}$
- Par identification :
- $a_T = \mathrm{R}\ddot{\theta}$ et $a_N = R\dot{\theta}^2$
- or $\vec{V} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = R\omega\overrightarrow{e_\theta}$ et $V = R\omega \rightarrow \omega = \frac{V}{R}$
- $\frac{dV}{dt} = R\dot{\omega} = R\ddot{\theta} \rightarrow a_T = \frac{dV}{dt}$ et
- $a_N = R\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{V^2}{R}.$

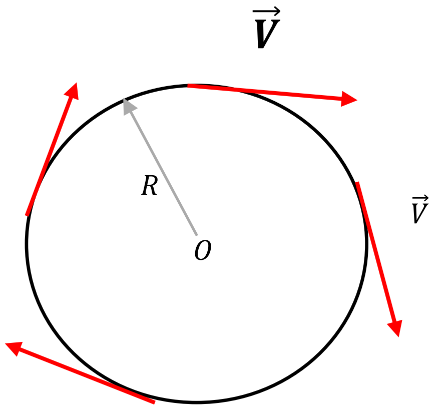
Mouvement circulaire uniforme

- Le mouvement circulaire est uniforme si la vitesse angulaire est une constante w = $\dot{\theta}$ = Cste

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{V}(t) = r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = r\,w\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r$$



On peut écrire aussi : $w = \dot{\theta} = Cste \Rightarrow \theta = wt + \theta_o = \dot{\theta}t + \theta_o$

la vitesse angulaire w étant constante ,la composante tangentielle du vecteur accélération est nulle , il ne reste que la composante normale, c'est elle qui « fait tourner » c'est-à-dire que la composante normale nous renseigne sur les variations de la direction du vecteur vitesse et non de sa norme , qui est fixe , donc même si le mouvement est uniforme (V et w sont constants) cette accélération existe nécessairement.

Mouvement circulaire uniformément varié

- Le mouvement circulaire est uniformément varié si l'accélération angulaire est une constante $\ddot{\theta}$ = Cste

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{e_r} \\ \vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \mathrm{R}\dfrac{d\,\overrightarrow{e_r}}{dt} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \\ \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + \mathrm{R}\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \end{cases}$$

où

$$\dot{\theta} = \ddot{\theta}_o\, t + \dot{\theta}_o$$

$$\theta = \frac{1}{2}\,\ddot{\theta}_o\, t^2 + \dot{\theta}_o\, t + \theta_o$$

- Le mouvement circulaire uniformément varié est soit accéléré ou retardé.
- MCUA si le produit scalaire $\dot{\theta}\,.\ddot{\theta} > o$
- MCUR si le produit scalaire $\dot{\theta}\,.\ddot{\theta} < o$

3. Mouvement Rectiligne Sinusoïdal
الحركة المستقيمة الجيبية

- Le mouvement d'un point matériel est rectiligne sinusoïdal si son équation horaire peut s'écrire sous la forme : $\boldsymbol{x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi)}$

ou $\boldsymbol{x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)}$

- X_m: Amplitude ou élongation maximale.
- X : Élongation ou abscisse instantanée, elle varie entre deux valeurs extrêmes $-X_m\ et + X_m$.
- ω : Pulsation du mouvement, son unité est le radian/seconde.
- φ: Phase initiale son unité est le radian.
- (ωt + φ) : Phase instantanée, son unité est le radian.

- **La vitesse :** En dérivant l'équation horaire on obtient l'expression de la vitesse instantanée :
- $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad = \quad \dot{x}(t) = \omega X_m \cos(\omega t + \varphi)$
- Cette vitesse varie entre deux valeurs extrêmes : $\pm\, \omega X_m$
- **L'accélération** : En dérivant l'équation de la vitesse on obtient l'expression de l'accélération instantanée :
- $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \ \ddot{x}(t) = -\omega^2 X_m \sin(\omega t + \varphi)$
- $\ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ d'où $\ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ = 0
- La période T est l'intervalle de temps constant qui sépare deux passages consécutifs du mobile au même point.
- Un mouvement est donc dit périodique, lorsqu'il se répète à l'identique, à des intervalles de temps identiques (la période).
- De l'instant t à t + T la phase a augmenté de 2π et conserve sa valeur c'est-à-dire :
- $W[(t + T) + \varphi] = Wt + \varphi + 2\pi \Rightarrow WT = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{W}$ (secondes)
- La fréquence f est le nombre d'oscillations en une seconde $f = \frac{1}{T}$ (hertz)
- On en déduit que : $W = 2\pi f$

Avec : $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est la pulsation

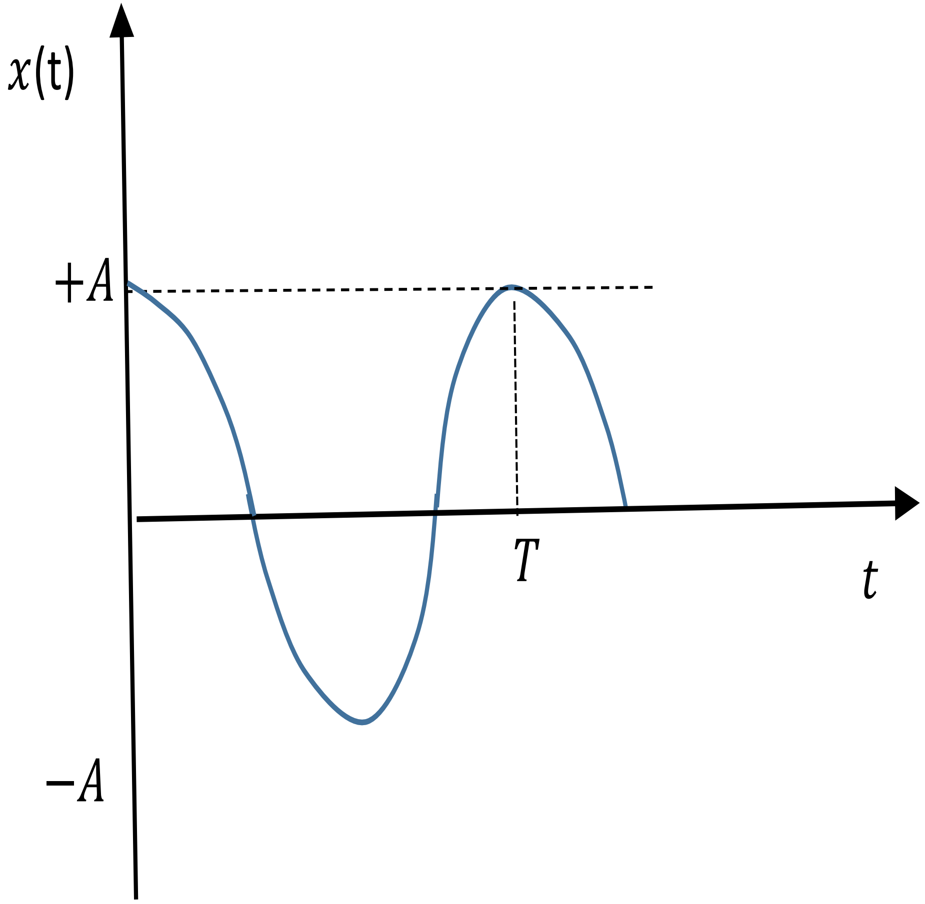
T : période du mouvement en seconde

$f = \frac{1}{T}$ est la fréquence de pulsation en Hertz

Exemple : Masse accroché à un ressort

Equation différentielle du mvt :

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) \rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$



Mouvement parabolique: mouvement d’un projectile (حركة قذيفة)

- On lance un projectile M dans l’air avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ faisant un angle α avec l’horizontale (ox), son mouvement s’effectue dans le plan (xoy), sa trajectoire est parabolique.
- Pour étudier le mouvement de M, on détermine : son accélération, sa vitesse, sa position et sa trajectoire y=f(x).

On décompose le mouvement de M suivant les deux axes ox et oy :

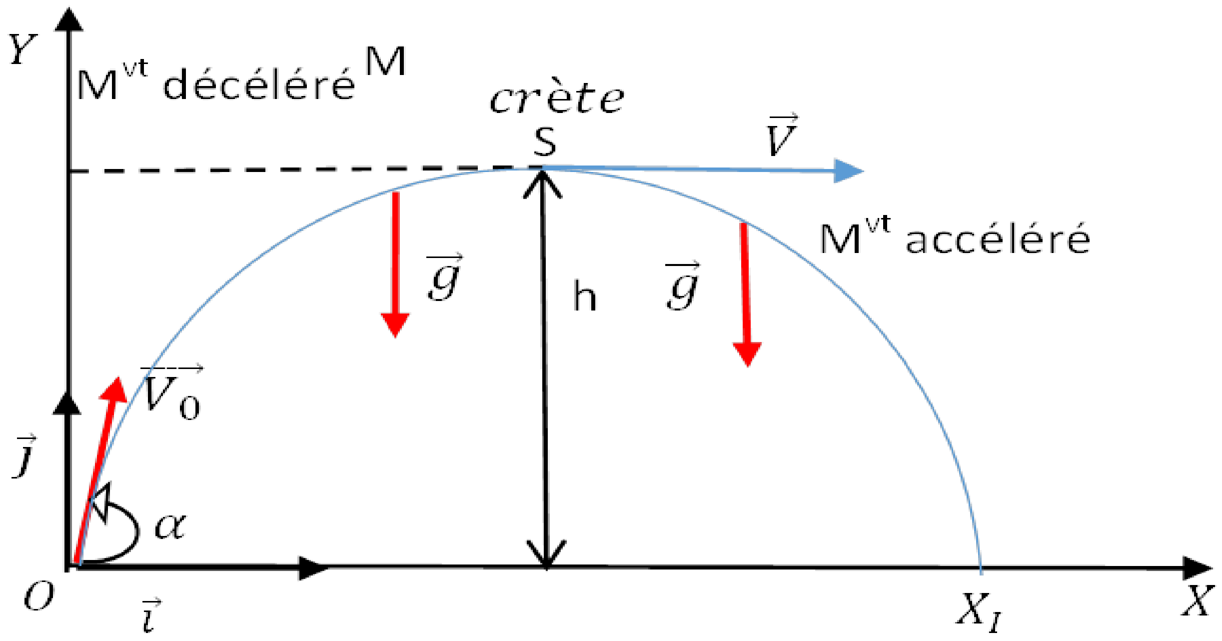
Selon **ox** :

l'accélération $a_x = 0 \Rightarrow V_0 = cste \Rightarrow x(t) = V_{0x}\, t + x_0$

$$le\ MRU\ suiant\ ox.$$

Selon **oy** : l'accélération $a_y = -g \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} a t^2 + V_{0y}\, t + y_0$

$$le\ MRUV\ suiant\ oy.$$



•Les équations horaires du mouvement :

Selon ox :

$$a_x = \ddot{x} = 0 \Rightarrow \frac{dV_x}{dt} = 0 \Rightarrow dV_x = 0$$

$$\Rightarrow V_x = cste = C_1$$

$$V_x = V_0 \; cos\alpha \;, \qquad \forall t$$

Et $V_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int dx = \int V_x dt$

$$\Rightarrow x(t) = V_0 \; cos\alpha \;. t + x_0$$

A partir des conditions initiales :

$t = 0$: $V_x(0) = V_0 cos\alpha$ et $x_0 = 0.$

Donc : $\boldsymbol{x(t) = V_0 \; cos\alpha . t}$

Selon oy :

$$a_y = \ddot{y} = -g \Rightarrow \frac{dV_y}{dt} = -g$$

$$\Rightarrow \int dV_y = \int -g dt \qquad \Rightarrow V_y(t) = -gt + C_2$$

A t=o, $C_2 = V_y(0) = V_0 \; sin\alpha$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V_y(t) = -gt + V_0 \; sin\alpha}$$

Et $V_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int dy = \int V_y dt$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \; sin\alpha \;\; t + y_0$$

$t = 0$: $y_0 = 0$

Donc : $\boldsymbol{y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \; sin \; \alpha . t}$

Donc les équations horaires du Mvt sont :

- $\begin{cases} x(t) = V_0 \cos\alpha\, t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$, $\vec{V} \begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_y(t) = -gt + V_0 \sin\alpha \end{cases}$ et $\vec{a} \begin{cases} 0 \\ -g \end{cases}$

- **L'équation de la trajectoire est obtenue en éliminant le temps :** $\boldsymbol{y = f(x)}$
- **On a:** $x(t) = V_0 \cos\alpha\, t \Rightarrow t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha}$
- On remplace t dans l'équation de y(t) :
- $y(t) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V_0 \cos\alpha}\right)^2 + V_0 \sin\alpha \frac{x}{V_0 \cos\alpha}$
- $\boldsymbol{y(t) = -\frac{g}{2\, {V_0}^2 \cos^2\alpha} x^2 + \tan\alpha\, .\, x}$
- Sous forme de : $y(t) = Ax^2 + Bx$ c'est l'équation d'une parabole.

- **L'altitude maximale $\boldsymbol{h}$:** $V_y(t_p) = 0$, ou t_p : le temps de pointe.
- $V_y(t_p) = -gt_p + V_0\ sin\alpha = 0 \Rightarrow t_p = \frac{V_0\ sin\alpha}{g}$
- $\boldsymbol{h} = y(t_p) = -\frac{1}{2}gt_p^2 + V_0\ sin\alpha\ t_p = -\frac{1}{2}g\left(\frac{V_0\ sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{(V_0\ sin\alpha)^2}{g}$
- $\boldsymbol{h = \frac{(V_0\ sin\alpha)^2}{2g}}$
- **Le temps pour lequel le projectile atteint le point I :**
- $\boldsymbol{y(t_I) = 0} \Rightarrow -\frac{1}{2}gt_I^2 + V_0\ sin\ \alpha\ t_I = 0$
- $\boldsymbol{t_I}\left(-\frac{1}{2}g\ t_I + V_0\ sin\ \alpha\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{t_1 = 0 \quad (origine)} \\ \boldsymbol{t_I} = \frac{2\ V_0\ sin\alpha}{g} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{t_I = \frac{2\ V_0\ sin\alpha}{g}}$

- **Calcul de la portée X_I :**
- On remplace $\mathbf{t_I}$ dans x(t) : $x(\boldsymbol{t_I}) = V_0 \cos\alpha \, \boldsymbol{t_I} = V_0 \cos\alpha \, \frac{2 \, V_0 \, sin\alpha}{g}$
- $x(\boldsymbol{t_I}) = \frac{2V_0^2 \, cos \, \alpha \, sin\alpha}{g}$
- $on \ a$: $2 \, cos \, \alpha \, sin\alpha = sin2\alpha$, alors : $\boldsymbol{X_I} = \frac{V_0^2 \, sin2\alpha}{g}$

- **Calcul de l'angle de tir pour lequel la portée X_I est maximale :**

- $\boldsymbol{X_I} = \frac{V_0^2 \, sin2\alpha}{g}$ est max si : $sin \, 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

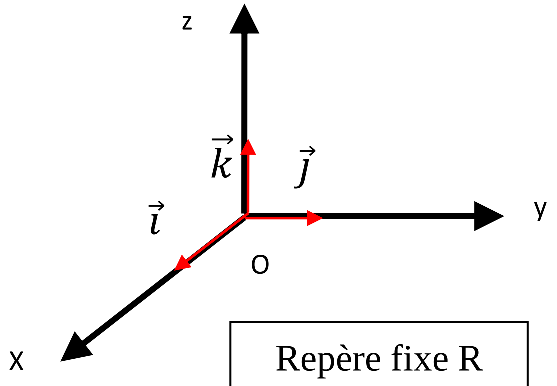
Mouvement relatif

- Un mouvement est dit absolu s'il est défini par rapport à un repère ou un référentiel absolu. Un repère absolu est un repère qui est au repos absolu dans l'univers. La terre est en mécanique un bon repère absolu.

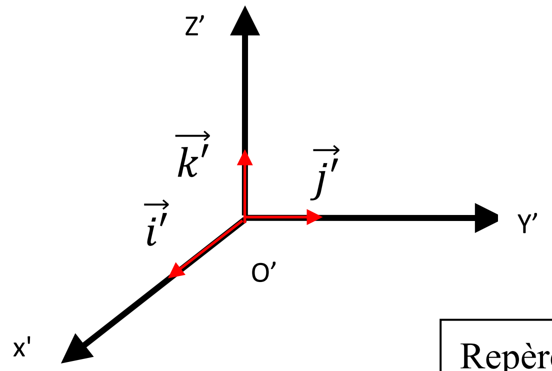
- Un mouvement est dit relatif s'il est défini par rapport à un repère ou un référentiel relatif. Un repère relatif est un repère qui bouge dans l'univers.

- Soit un point M en mouvement par rapport à un repère mobile R'(O', x', y', z') qui est lui-même en mouvement par rapport à un repère fixe R (O, x, y, z).

- Le mouvement d'entrainement est le mouvement de R' par rapport à R (R'/R).



Repère fixe R



Repère mobile R'

- **1/La position :**
- La position de M par rapport au repère fixe R est dite position absolue :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

- La position relative est la position de M par rapport au repère mobile R' :

$$\overrightarrow{O'M} = x'\,\vec{\imath'} + y'\vec{\jmath'} + z'\vec{k'}$$

- Avec: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

2/La vitesse :(Loi de composition de vitesse)

- $\overrightarrow{V_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

- $\overrightarrow{V_a} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

- Or : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

- La vitesse absolue devient : $\overrightarrow{V_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$

- $\overrightarrow{V_a} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'} + x'\frac{d}{dt}\vec{i'} + y'\frac{d}{dt}\vec{j'} + z'\frac{d}{dt}\vec{k'}$

- La vitesse absolue est composée de la vitesse d’entrainement $\overrightarrow{V_e}$ et de la vitesse relative $\overrightarrow{V_r}$ tel que :

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_e} + \overrightarrow{V_r}$$

- R′ est en mouvement par rapport à R: ce mouvement peut être décomposé en un mouvement de translation de R′ par rapport à R caractérisé par la vitesse $\vec{V}(O')|$R de l'origine O′ par rapport à R et un mouvement de rotation de R′ par rapport à R caractérisé par un vecteur de de rotation $\overrightarrow{\Omega_{R'/R}}$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{V_e}} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{i}}' + y'\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{j}}' + z'\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{k}}' = \vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{O}')|\mathrm{R} + \overrightarrow{\Omega_{R'/R}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \text{ (Formule de Varignon)}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{V_r}} = \frac{dx'}{dt}\vec{\boldsymbol{i}}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\boldsymbol{j}}' + \frac{dz'}{dt}\vec{\boldsymbol{k}}' = \vec{\boldsymbol{V}}(\mathrm{M})/\mathrm{R'}$$

- La vitesse d'entrainement $\overrightarrow{V_e}$ est la vitesse du repère R' par rapport au repère fixe R.
- La vitesse relative $\overrightarrow{V_r}$ est la vitesse de M par rapport au repère mobile R'.
- Avec : $\overrightarrow{V_a}(o') = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$ représente la vitesse absolue de o'/R.
- Si R' est en translation par rapport à R alors $\overrightarrow{\Omega_{R'/R}} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{V_e} = \vec{V}(O')|$R

- En coordonnées cylindriques on a : $\vec{V}(t) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\Theta + \dot{z}\vec{e}_z$
- $\vec{V_e} = r\dot{\theta}\,\vec{e}_\Theta$ $\quad\quad \vec{V_r} = \dot{r}\,\vec{e}_r + \dot{z}\,\vec{e}_z$
- $\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\Theta + \dot{z}\,\vec{e}_z$

L'accélération absolue est l'accélération de M par rapport au repère fixe R :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

$$\vec{a}(t) = \left[\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}\right] + 2\left[\frac{dx'}{dt}\frac{di'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{dj'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{dk'}{dt}\right] + \left[\frac{d^2\overrightarrow{x'}}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2\overrightarrow{y'}}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2\overrightarrow{z'}}{dt^2}\overrightarrow{k'}\right]$$

On constate que cette accélération est composée d'une accélération relative $\overrightarrow{a_r}$, d'une accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e}$ et d'une accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c}$.

$$\vec{a}(t) = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$$

- $\overrightarrow{a_r} = \left[\frac{d^2\overrightarrow{x'}}{dt^2}\overrightarrow{\mathrm{i}'} + \frac{d^2\overrightarrow{y'}}{dt^2}\overrightarrow{\mathrm{j}'} + \frac{d^2\overrightarrow{z'}}{dt^2}\overrightarrow{\mathrm{k}'}\right]$
- $\overrightarrow{a_e} = \left[\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \quad + \mathrm{x}'\frac{d^2\overrightarrow{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\overrightarrow{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}\right]$
- $\overrightarrow{a_c} = 2\left[\frac{dx'}{dt}\frac{di'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{dj'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{dk'}{dt}\right]$
- En coordonnées cylindriques on a : $\vec{\mathrm{a}}(\mathrm{t}) = (\ddot{\mathrm{r}} - \mathrm{r}\,\dot{\theta}^2)\,\vec{\mathrm{e}}\mathrm{r} + (2\dot{\mathrm{r}}\,\dot{\theta} + \mathrm{r}\,\ddot{\theta})\,\vec{e}_\Theta + \ddot{\mathrm{z}}\,\vec{\mathrm{e}}\mathrm{z}$
- Avec: $\vec{\mathrm{a}}(\mathrm{t}) = \overrightarrow{\mathrm{a}_\mathrm{r}} + \overrightarrow{\mathrm{a}_\mathrm{e}} + \overrightarrow{\mathrm{a}_\mathrm{c}}$
- $\overrightarrow{\mathrm{a}_\mathrm{r}} = \ddot{\mathrm{r}}\,\vec{\mathrm{e}}\mathrm{r} + \ddot{\mathrm{z}}\,\vec{\mathrm{e}}\mathrm{z}$
- $\overrightarrow{\mathrm{a}_\mathrm{e}} = \mathrm{r}\,\ddot{\theta}\,\vec{e}_\Theta - \mathrm{r}\,\dot{\theta}^2\,\vec{\mathrm{e}}\mathrm{r}$
- $\overrightarrow{\mathrm{a}_\mathrm{c}} = 2\dot{\mathrm{r}}\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\Theta = 2\overrightarrow{\Omega}\,(\mathrm{R}'/\mathrm{R}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{V}_\mathrm{r}})$

- Si R’ est en translation par rapport à R alors

$$\overrightarrow{\Omega_{R'/R}} = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{V_e} = \vec{V}(O')\Big|R$$

$$\overrightarrow{a_c} = 0 \text{ et } \overrightarrow{a_e} = \vec{a}(O')|R$$

Si la translation est rectiligne uniforme on a :

$$\vec{V}(O')\Big|R = \overrightarrow{\mathrm{Cste}} \text{ et } \vec{a}(O')|R = \overrightarrow{a_e} = \vec{0}$$

Chapitre IV : Dynamique

1. Introduction
2. Systèmes étudiés et actions mécaniques
3. Différents types de forces
4. Lois de Newton
5. 1ère loi de Newton (Principe d'inertie)
6. 2ème loi de Newton (Principe fondamentale de la dynamique)
7. 3ème loi de Newton (Principe des actions réciproques

Chapitre IV : Dynamique

8. Application (le pendule simple)
9. Moment d'une force
10. Moment cinétique
11. Théorème du moment cinétique (TMC)
12. Analogie entre grandeurs de translation et de rotation

Introduction

- La cinématique du point a permis de décrire le mouvement d'un objet, sans s'occuper des causes, c'est la dynamique qui permet de relier le mouvement à ses causes.
- Newton a établi les lois fondamentales de la dynamique, notamment une loi (la $2^{ème}$) reliant force et accélération, en d'autres termes elle permet de relier des grandeurs dynamiques (forces) à une grandeur cinématique (l'accélération).

différents types de forces

- Il existe deux grandes catégories de forces :
- Forces d’interaction à distance ex : forces de gravitation le poids, force électromagnétiques……
- Forces de contact ex : forces de frottement, tension d’un fil, réaction d’un support ……

poids d'un point matériel

Le poids d'un corps, de masse m, correspond principalement à la force d'attraction gravitationnelle qu'exerce la terre sur lui .

Un point matériel M de masse m est soumis à son poids $\vec{\mathrm{p}}$, force verticale et dirigée vers le bas , de norme p =mg

$$\vec{P} = \mathrm{m}\ \vec{g}$$

champ de pesanteur g = 9,81m/s2

La masse en Kg $\quad poids\ en\ Newton$

forces de contact

- Action du support sur lequel repose le système $\overrightarrow{R}$, ou réaction normale.
- Force de frottement solide entre le système et le support.
- Force de frottement visqueux avec un fluide (gaz ou liquide).
- Force de rappel d’un ressort
- Tension d’un fil

Force de Frottement

- La deuxième loi nous dit qu'il faut une force pour décélérer le mouvement : c'est la force de frottement.
- Il y a deux formes principales de frottements :

• le frottement cinétique qui s'oppose à un mouvement déjà établi.

$$\boldsymbol{F_f} = \mu_{\boldsymbol{C}}\, \boldsymbol{R_n}$$

• le frottement statique qui empêche un mouvement de démarrer.

$$\boldsymbol{F_f} = \mu_{\boldsymbol{S}}\, \boldsymbol{R_n}$$

- L'origine du frottement est l'interaction électromagnétique des atomes qui forment les solides, les liquides et les gaz.

Exemples de Coefficients de frottement statique et cinétique

Matériaux	μ_S	μ_c
Acier sur glace	0,1	0,05
Acier sur acier	0,6	0,4
Bois Sur Bois	0,5	0,3
Teflon Sur Acier	0,04	0,04
Chaussure Sur glace	0,1	0,05
Pneu de voiture sur béton sec	1,0	0,7

lois de Newton

- Les principes ou lois ne se démontrent pas, c'est à partir de l'observation d'un grand nombre d'expériences que le physicien est amené à énoncer une loi qui restera valide tant qu'une autre expérience ne la remettra pas en question.
- La mécanique classique est construite à partir de trois lois que Newton a énoncées.
- Un système matériel est un ensemble de points matériels.
- Un système matériel est isolé, s'il n'existe aucune action venant de l'extérieur et exerçant sur le système exemple : un cosmonaute dans l'espace
- Un système matériel est pseudo-isolé si les actions extérieures qui agissent sur le système se compensent (tout se passe comme si le système était isolé),ainsi sur terre , un système ne peut être rigoureusement isolé puisqu'il subit obligatoirement l'action de son poids.

vecteur quantité de mouvement

Le vecteur quantité de mouvement noté $\vec{P}$ d'un point matériel de masse m se déplaçant avec une vitesse $\vec{V}$ Dans un référentiel donné est défini par :

$$\vec{P} = m \vec{V}$$

$1^{ère}$ loi de Newton (Principe d'inertie)

Dans un référentiel galiléen (R) , un système mécanique isolé ou pseudo-isolé est soit au repos soit en mouvement rectiligne uniforme.

$\overrightarrow{V} = C^{ste} \Rightarrow \vec{P} = m\ \vec{V} = C^{ste} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$; $V = C^{ste} = V_0$ ou $V = 0$ (objet au repos)

Ce principe conduit à la loi de conservation de la quantité de mouvement totale d'un système isolé ou pseudo-isolé :

$$\vec{P} = \vec{P}' \quad \Rightarrow \quad m_1\vec{V}_1 = m_2\vec{V}_2 = m_3\vec{V}_3$$

De cette première loi découle le principe fondamental de la statique :

$$\sum\vec{F} = \vec{0}$$

- Si un système est en équilibre, alors $\overrightarrow{V}$ = 0 et $\vec{a}$ = 0 $\Rightarrow$ $\sum \vec{F} = \vec{0}$

- Cependant l'inverse n'est pas vrai : si $\sum \vec{F} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ le système est soit au repos ,soit en mouvement rectiligne uniforme ($\overrightarrow{V}$ = C^{ste}).

2ème loi de Newton (Principe fondamental de la dynamique)

Dès qu'un système subit des actions provenant de l'extérieur, il n'est plus isolé, les conséquences sont une modification du mouvement qui se manifeste par une variation du vecteur quantité de mouvement qui ne se conserve plus.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\,\vec{V}_G) = m\frac{d\vec{V}_G}{dt} = m\vec{a}_G$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{\mathbf{G}}$$

$3^{ème}$ loi de Newton (Principe des actions réciproques)

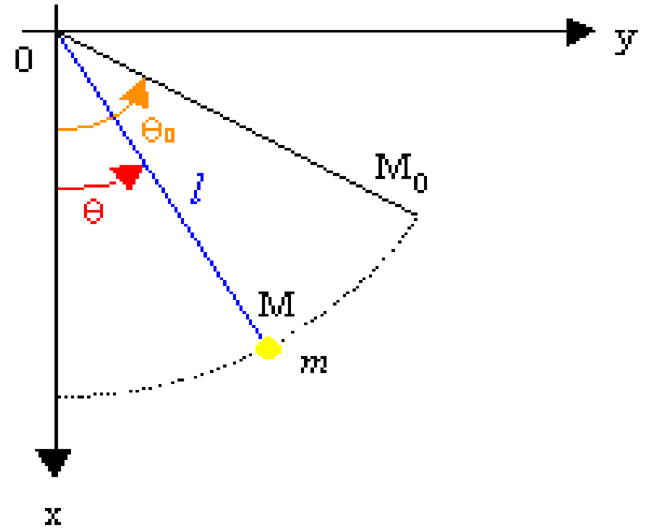
Soient deux systèmes S_1 et S_2 en interaction(à distance ou par contact)

A chaque fois qu'un système S_1 exerce une action (une force) $\vec{F}_{1\text{-}2}$ sur un système S_2 , alors le système S_2 exerce une action (une force) $\vec{F}_{2\text{-}1}$ sur le système S_1.

Ces forces sont égales et opposées : $\vec{F}_{1\text{-}2} = - \vec{F}_{2\text{-}1}$

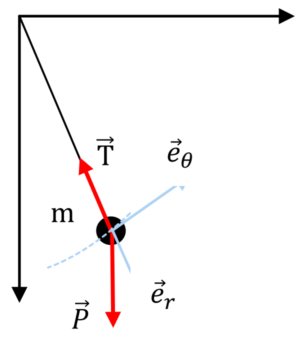
Application (le pendule simple)

Un pendule simple est constitué d'une masse m considérée ponctuelle fixée à l'extrémité libre d'un fil de longueur l, on écarte la masse de sa position initiale d'un angle θ_o , et on la lâche sans vitesse initiale, on néglige les frottements de l'air.



En utilisant le principe fondamental de la dynamique, déterminons l'équation horaire du mouvement du pendule.

D'après le PFD on a : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$



En projetant sur la base polaire on aura :

$$mg\cos\theta - T = m\, a\, \vec{e}_r$$

$$-mg\sin\theta = m\, a\, \vec{e}_\theta$$

- On sait qu'en coordonnées polaires , l'accélération est donnée pour un mouvement circulaire (r = Cste)

$$\vec{a}(t) = -\ r\,\dot{\theta}^2\ \vec{e}_r + r\,\ddot{\theta}\ \vec{e}_\theta$$

- Avec r = l , et en combinant les deux équations on obtient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

- Le pendule est un oscillateur harmonique si l’angle θ est suffisamment petit pour que $\sin\theta \approx \theta$, l’équation différentielle obtenue pourra alors être linéarisée .

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\theta = 0$$

On pose $\sqrt{\frac{g}{l}} = W$ (pulsation)

$\ddot{\theta} + W^2\,\theta = 0$ L’équation du mouvement du pendule est alors une équation différentielle du second ordre sans second membre, elle admet pour solution :

$$\theta(t) = A_1 \cos wt + A_2 \sin wt$$

Les oscillations sont sinusoïdales (oscillateur harmonique non amorti) car on a négligé les frottements de l'air.

Les constantes A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration que l'on détermine à partir des conditions initiales.

- à t=o , $\theta(t) = \theta_o = A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0 \Rightarrow A_1 = \theta_o$
- à t =o , $V(t) = V_o = o = - A_1 \sin 0 + A_2 \cos 0 = o \Rightarrow A_2 = o$

$$\theta(t) = \theta_o \cos wt$$

la période est donnée par :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Moment d'une force

- Il est possible de donner une autre forme au principe fondamentale de la dynamique en introduisant une nouvelle grandeur cinématique intéressante, lorsqu'un système (point matériel) tourne autour d'un point ou un axe « le moment d'une force ».
- Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point O ou un axe Δ exprime l'aptitude de cette force à produire une rotation autour du point O ou de l'axe Δ passant par O
- L'expression du moment d'une force est donné par le produit vectoriel du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et la force $\vec{F}$

$$\overrightarrow{M_o}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

$$\overrightarrow{M_o}(\vec{F}) = OM.\,F.\,\sin\alpha\,\vec{\mu}$$

- L'unité du moment d'une force est le N.m
- Un corps est en équilibre et au repos si
- la somme des forces qui lui sont appliquées est nulle
- La somme des moments des forces appliquées est nulle
- la vitesse du corps est nulle

Moment cinétique

On appelle moment cinétique noté $\vec{L}_o$ ou $\vec{L}_\Delta$ du point M en rotation autour d'un point O ou autour de l'axe Δ passant par O , le moment de sa quantité de mouvement.

$$\vec{L}_o = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}$$

L'unité du moment cinétique $Kg.m^{-2}.S^{-1}$

En coordonnées polaires on obtient :

$$\vec{L}_o = r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\ \vec{e}_r + r\dot{\theta}\ \vec{e}_\Theta)$$

$$\vec{L}_o = r\vec{e}_r \wedge m\,\dot{r}\ \vec{e}_r + r\vec{e}_r \wedge m\, r\,\dot{\theta}\ \vec{e}_\Theta$$

$$\vec{L}_o = m\, r^2\, \dot{\theta}\ \vec{K}$$

$$\vec{L}_o = J\,\vec{w}$$

On appelle la quantité $J = mr^2$ le moment d'inertie.

Il décrit la répartition de la masse dans l'espace.

Théorème du moment cinétique (TMC)

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_o) = \sum \overrightarrow{M_0}(\vec{F})$$

Démonstration:

$$\vec{L}_o = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}$$

On dérive cette expression par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_o) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_o) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d}{dt}m\vec{V}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_o) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{a} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \sum \overrightarrow{M_0}(\vec{F})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_o) = \sum \overrightarrow{M_0}(\vec{F})$$

Analogie entre grandeurs de translation et de rotation

Vitesse linéaire	$\vec{V}$	**Vitesse angulaire**	$\mathbf{w} = \dot{\theta}$
Accélération	$\vec{a}$	Accélération angulaire	$\ddot{\theta} = \dot{w}$
Force	$\vec{F}$	Moment de force	$\vec{Mo}\,(\vec{F})$
Masse(inertie)	M	Moment d'inertie	$J = mr^2$
Quantité de mouvement	$\vec{P} = m\,\vec{V}$	Moment cinétique	$\vec{Lo} = J\,\vec{w}$
Energie Cinétique	$Ec = \frac{1}{2}\,m\,V^2$	Energie Cinétique	$Ec = \frac{1}{2}\,J\,w^2$

Chapitre V : Travail, Puissance & énergie

1. Généralités
2. Travail d’une force
3. Puissance d’une force
4. Energie

Chapitre V Travail, Puissance & énergie

- L'énergie est une grandeur fondamentale de la physique, qui permet de résoudre certains problèmes de la mécanique du point par une équation scalaire que l'on pouvait résoudre aussi par la forme vectorielle du principe fondamental de la dynamique.

Travail d'une force

- Une force qui modifie le mouvement d'un objet qui était initialement au repos, ou provoque sa déformation travaille, le travail d'une force exprime donc l'effort qu'il faut fournir pour déplacer un objet. On le note W du mot anglais work.

- On appelle travail élémentaire de la force $\vec{F}$ pendant la durée dt, le produit scalaire de cette force par le déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ noté aussi $\overrightarrow{dOM}$

$$\delta w = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$$

On peut l'exprimer autrement, comme la vitesse est la dérivée du déplacement par rapport au temps

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt} \qquad \text{donc} \qquad \overrightarrow{dl} = \vec{V}\,dt$$

$$\delta w = \vec{F}\,.\,\overrightarrow{dl} = \vec{F}.\,\vec{V}\,.dt$$

le travail de la force $\vec{F}$ le long d'un trajet AB ou (courbe C) est égale à la somme des travaux élémentaires.

$$W(\vec{F})_{A\_B} = \sum \delta w = \int_A^B \delta w$$

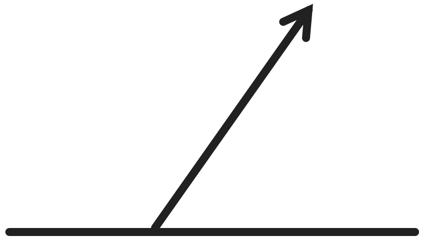
$$W(\vec{F})_{A\_B} = \int_A^B \vec{F}\,.\,\overrightarrow{dl}$$

Travail d’une force constante sur un déplacement rectiligne

Le travail de la force sur le déplacement AB est donné par le produit scalaire de cette force par le déplacement AB. Unite : N.m , 1N.m = 1 joule

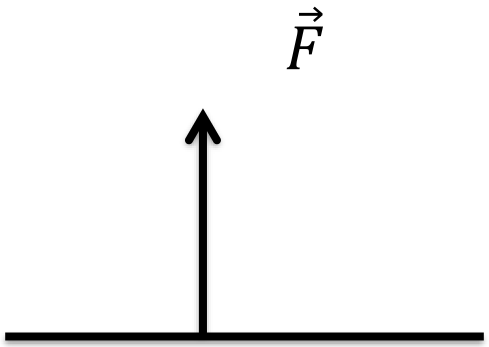
$$W(\vec{F})_{A\_B} = \int_A^B \vec{F} \,.\, \overrightarrow{dl} = \vec{F} \int_A^B \overrightarrow{dl}$$

$$W(\vec{F})_{A\_B} = \vec{F} \,.\, \overrightarrow{AB} = F \,.\, AB \,.\, \cos\alpha$$



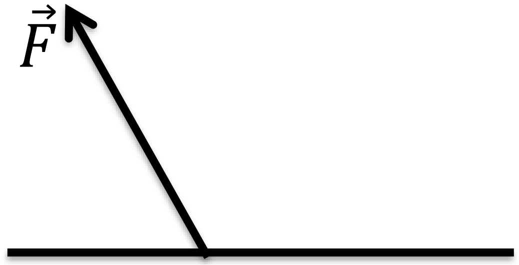
Le travail est moteur

$W > 0 \quad (\alpha < \frac{\pi}{2})$



le travail est nul

$W = 0 \; (\alpha = \frac{\pi}{2})$

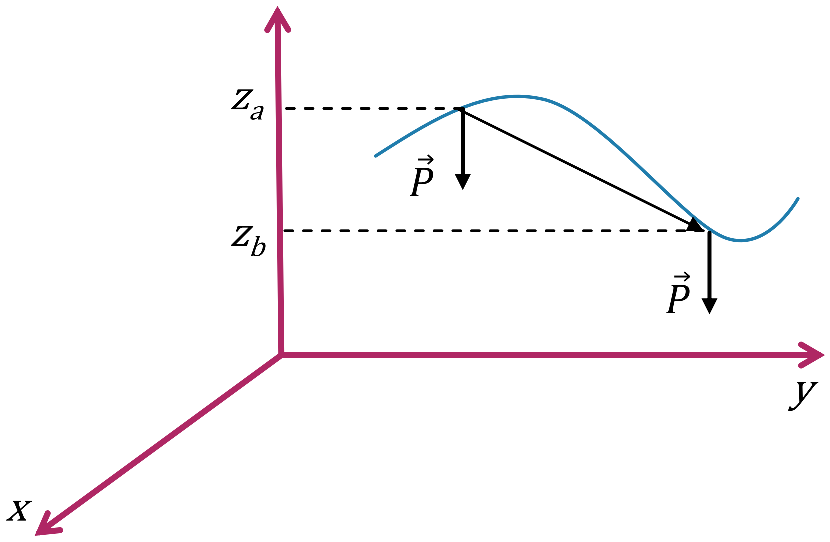


le travail est résistant

$W < 0 \; (\alpha > \frac{\pi}{2})$

Travail d'une force constante sur un déplacement quelconque.

- Prenons comme exemple de travail d'une force constante , le travail du poids.
- Soit un point matériel M de masse m ,il est donc soumis à son poids $\vec{P}$ qui est une force constante durant le temps .
- Le travail du poids sur un déplacement AB est donc le produit scalaire du poids $\vec{P}$ = m$\vec{g}$ par le vecteur déplacement $\overrightarrow{AB}$.



$$W(\vec{P})_{A\_B} = \int_A^B \vec{P} \cdot \overrightarrow{dl} = \vec{P} \int_A^B \overrightarrow{dl} = \vec{P} . \overrightarrow{AB} = P . AB . \cos\alpha$$

$$\vec{P} . \overrightarrow{AB} = (o\,\vec{i} + o\,\vec{j} - mg\,\vec{k}) . (x_b - x_a)\,\vec{i} + (y_b - y_a)\,\vec{j} + (z_b - z_a)\,\vec{k}$$

$$\vec{P} . \overrightarrow{AB} = -mg\,(z_b - z_a) = -m\,g\,\Delta h$$

- La différence d'altitude entre le point A et B est donné par :
- $\Delta h = z_b - z_a$ En remarquant que $AB \cdot \cos\alpha = z_a - z_b$
- $\vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = -mg\,(z_b - z_a) = -m\,g\,\Delta h = mg \cdot AB \cdot \cos\alpha$

On constate que le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi, mais dépend seulement de la différence d'altitude entre le point de départ A et le point d'arrivée B, on dit que le poids est **une force conservative**.

- Si le point M monte , $\Delta h > o$, le travail est négatif , on dit qu'il est résistant.
- Si le point M descend , $\Delta h < o$, le travail est positif , on dit qu'il est moteur.

Travail d'une force variable sur un déplacement quelconque.

Prenons comme exemple de force variable la force élastique $\vec{T}$, ou la tension d'un ressort qui varie avec l'état d'étirement x de celui-ci. $\vec{T}$ = - K x $\vec{\imath}$

Le travail de la tension du ressort d'une position A à une position B est donné :

$$W(\vec{T})_{A\_B} = \int_A^B \vec{T} \, . \, \overrightarrow{dl} = \int_A^B \vec{T} \, . \, \overrightarrow{dx} = \int_A^B -Kx.dx = -K\int_{Xa}^{Xb} x.dx$$

$$W(\vec{T})_{A\_B} = \frac{1}{2}Kx_a^2 - \frac{1}{2}Kx_b^2$$

Forces conservatives $\vec{F}$C

Toutes les forces dont le travail ne dépend pas du chemin suivi:

Travail du poids

Travail de la tension d'un ressort

Travail d'une force constante en norme et en direction

Forces non conservatives $\vec{F}$NC

- Toutes les forces dont le travail dépend du chemin suivi :
- Forces de frottement

Puissance d’une force

- La puissance d’une force nous renseigne sur la rapidité avec laquelle le travail de cette force est effectué.
- Un même travail, peut donc être réalisé plus ou moins rapidement.
- La puissance moyenne est donnée par le rapport du travail effectué pendant une durée Δt :

$$P_m = \frac{W}{\Delta t}$$

L’unité de la puissance est le watt, il correspond à un travail de 1 joule effectué en 1 seconde.

- La puissance instantanée correspond au travail effectué par la force pendant la durée élémentaire dt .

$$P(t) = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F} \, . \, \overrightarrow{dl}}{dt} = \vec{F} . \, \vec{V}$$

On peut établir une relation entre le travail et la puissance d'une force :

- $W(\vec{F})_{A\_B} = \sum \delta w = \int_A^B \delta w$
- $W(\vec{F})_{A\_B} = \int_A^B \vec{F} \, . \, \overrightarrow{dl}$
- $W(\vec{F})_{A\_B} = \int_{ta}^{tb} \vec{F} . \, \vec{V} \, . \, dt = \int_{ta}^{tb} P \, dt$

Energie

L'énergie est une grandeur scalaire qui permet de résoudre de nombreux problèmes de dynamique , on distingue trois types d'énergie :

- **Energie cinétique**

C'est l'énergie liée au mouvement et donc à la vitesse $\vec{V}$

$$\mathbf{E_c = \frac{1}{2} m V^2}$$

Le théorème de l'énergie cinétique est donné par :

$$\frac{1}{2} m V_b^2 - \frac{1}{2} m V_a^2 = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c = \sum W A\_B (\vec{F}_{ext})$$

Le théorème de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel, soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position A et une position B est égale à la somme des travaux de toutes ces forces (conservatives et non conservatives).

Démonstration :

- $W(\vec{F})_{A\_B} = \int_A^B \vec{F} \,.\, \overrightarrow{dl}$

- D'où : $\sum W(\vec{F})_{A\_B} = \sum \int_A^B \vec{F} \,.\, \overrightarrow{dl} = \int_A^B \sum \vec{F}.\overrightarrow{dl}$

- $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \text{m}\, \vec{a} = \text{m}\, \frac{d\vec{V}}{dt}$

- et $\vec{\text{V}} = \frac{\text{d}\overrightarrow{\text{OM}}}{\text{dt}} = \frac{\text{d}\vec{\text{l}}}{\text{dt}}$ donc $\text{d}\vec{\text{l}} = \vec{\text{V}}\, \text{dt}$

- $\sum W(\vec{F})_{A\_B} = \int_A^B \text{m}\, \frac{d\vec{V}}{dt} \,.\, \overrightarrow{dl} = \int_A^B \text{m}\, \frac{d\vec{l}}{dt} \,.\, \overrightarrow{dV} = \int_A^B \vec{V}.\, d\vec{v}$

- $\sum W(\vec{F})_{A\_B} = \int_A^B \vec{V}.\, d\vec{v} = \frac{1}{2}\text{m}\, V_b^2 - \frac{1}{2}\text{m}\, V_a^2 = \text{E}_\text{c}(\text{B}) - \text{E}_\text{c}(\text{A}) = \Delta\, \text{E}_\text{c}$

Energie potentielle

- L'énergie potentielle est l'énergie liée à la position .
- Le travail d'une force conservative ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial (A) et final (B) , ce travail peut s'exprimer à partir d'une fonction Ep appellée énergie potentielle.
- Le théorème de l'énergie potentielle est donné par :

$$E_p(B) - E_p(A) = \Delta E_p = -\sum W_{A\_B}(\vec{F}_c)$$

- La variation de l'énergie potentielle entre deux points A et B est égale à l'opposé du travail des forces conservatives entre ces deux points.
- Energie potentielle de pesanteur : $E_{pp} = mgh = -W_{A\text{-}B}(\vec{P})$
- Energie potentielle élastique : $E_{pe} = \frac{1}{2} K\Delta l = -W_{A\text{-}B}(\vec{T})$

Energie mécanique

- L'énergie mécanique d'un système est égale à la somme des énergies cinétique et potentielle de ce système.

$$E_{mec} = E_c + E_p$$

- Le théorème de l'énergie mécanique est donné par :

$$\Delta E = E_{mec}(B) - E_{mec}(A) = \sum W_{A\_B}\,(\vec{F}_{NC})$$

- La variation de l'énergie mécanique entre deux points A et B est égale à la somme des travaux des forces non conservatives entre ces deux points.

Démonstration :

Le théorème de l'énergie cinétique (TEC) nous donne : $\Delta E_c = \sum W_{A\_B}\,(\vec{F}_{ext})$

$$\Delta E_c = \sum W_{A\_B}(\vec{F}_C) + \sum W_{A\_B}(\vec{F}_{NC}) = E_c(B) - E_c(A)$$

Or $\quad E_p(B) - E_p(A) = \Delta E_p = -\sum W_{A\_B}(\vec{F}_c)$

Donc $\quad E_p(A) - E_p(B) = \sum W_{A\_B}(\vec{F}_c)$

D'où: $\quad \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = E_p(A) - E_p(B) + \sum W_{A\_B}(\vec{F}_{NC})$

$$\sum W_{A\_B}(\vec{F}_{NC}) = E_c(B) - E_c(A) + E_p(B) - E_p(A)$$

$$\sum W_{A\_B}(\vec{F}_{NC}) = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E$$

- Si le système est conservatif ou isolé, alors il y a conservation de l'énergie mécanique :

$$\mathbf{\Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E = 0}$$

Donc on peut dire que si un système est conservatif c'est-à-dire que s'il n'est soumis qu'à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas, alors la variation de l'énergie mécanique de ce système est nulle.