SEMESTRE	Intitulé de la matière		Coefficient	Code
S1	Algèbre 1		5	ALG-1
VHH	Cours	Travaux dirigés	Travaux Pratiques	
67h30	3h00	1h30	-	

Pré requis :

Notions de base des mathématiques des classes Terminales (ensembles, fonctions, équations, ...).

Objectifs de l'enseignement

Cette première matière d'Algèbre I est notamment consacrée à l'homogénéisation des connaissances des étudiants à l'entrée de l'université. Les premiers éléments nouveaux sont enseignés de manière progressive afin de conduire les étudiants vers les mathématiques plus avancées. Les notions abordées dans cette matière sont fondamentales et parmi les plus utilisées dans le domaine des Sciences et Technologies. Notions de logique mathématique.

Contenu de la matière: Ch 0: Rappel : Les méthode de Raisonnement mathématique

Chapitre 1. Les ensembles, les relations et les applications (5 semaines)

1. Théorie des ensembles.
2. Relation d'ordre, Relations d'équivalence.
3. Application injective, surjective, bijective et fonction réciproque: définition d'une application, image directe, image réciproque, caractéristique d'une application.

Chapitre 2 : Les nombres complexes

1. Définition d'un nombre complexe.
2. Représentation d'un nombre complexe : Représentation algébrique, représentation trigonométrique, représentation géométrique, représentation exponentielle.
3. Racines d'un nombre complexe : racines carrées, résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, racines nième d'un nombre complexe.

Chapitre 3 : Espace vectoriel

1. Espace vectoriel, base, dimension (définitions et propriétés élémentaires).
2. Application linéaire, noyau, image, rang.

Notions de Logique mathématique : La 1ère Partie qu'on va faire Concerne :

1-1. Assertion (ou Proposition Logique) : exp 2 est un nbre paire. Vraie

Defn : Une assertion est une Phrase soit vraie, soit fausse.

Par exemple : $2+3=5$. est une assertion vraie.

$\forall x \in \mathbb{R}$. on a $x^2 \geq 0$ est une assertion vraie

3 est Supérieur à 6 est une assertion fausse.

Définition : Toute proposition démontrée vraie est appelée : Théorème par exo (Thé de Thalès.....)

Etant donné deux Proposition P et Q, Alors :

1-2. Opérations sur les Propositions :

1-2-1 La Conjonction logique (et) : la Proposition P et Q notée $(P \wedge Q)$ est vraie si P est vraie et Q est vraie. L'assertion $P \wedge Q$ est fausse Sinon. On résume ceci sur une table de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Remarque :
$P \wedge P \Leftrightarrow P$
$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

exemple : ① $1+2=3$ et $3\times1=3$, est une Ass Vraie.
② $\sqrt{(-5)^2}=5$ et $|-4|=-4$ " " fausse.

1-2-2. La disjonction Logique (ou) la Proposition P ou Q notée $(P \vee Q)$ est Vraie si l'une au moins des propositions est Vraie. càd P vraie ou Q vraie.

.. L'assertion $P \vee Q$ est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque :
$P \vee P \Leftrightarrow P$
$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$

exemple : ① $1+2=3$ ou $3\times1=3$. est une assertion Vraie.
② $\frac{-7}{2} > 0$ ou $(-4)^2=16$ " " "
③ $5 < 3$ ou $1 < 0$ " " fausse

1-2-3 La négation Logique (non P ou $\overline{P}$) : (non P est le Contraire de P)

L'assertion $\overline{P}$ est Vraie si P est fausse, et fausse si P est Vraie

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

exemple : La négation de l'assertion $2 \geq 0$ est l'assertion $2 < 0$
" " " " $x+3=1$ " $x+3 \neq 1$

— Règle : pour établir la négation d'une Proposition on remplacera :

$\forall$ par $\exists$ et $\exists$ par $\forall$; $=$ par $\neq$; $\in$ par $\notin$
et Par ou et ou Par et ; $\geq$ par $<$; $>$ par $\leq$;
Ainsi les expression Par leur négations.

$\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$; $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$
$\overline{\forall, P(x)} \Leftrightarrow \exists, \overline{P(x)}$; $\overline{\exists, P(x)} \Leftrightarrow \forall, \overline{P(x)}$

Remarque
$\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$

Autres exemples

① $\overbrace{\underbrace{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}_{V} \text{ et } \underbrace{|-5| \neq 5}_{F}}^{\text{Fausse}}$

Sa négation : $\underbrace{\sqrt{2} \in \mathbb{Q}}_{F}$ ou $\underbrace{|-5| = 5}_{V}$ → Vraie

②

$\underbrace{\sqrt{(-5)^2} = -5}_{F}$ ou $\underbrace{\sqrt{2+3} = \sqrt{2} + \sqrt{5}}_{F}$ Fausse

$\underbrace{\sqrt{(-5)^2} \neq -5}_{V}$ et $\underbrace{\sqrt{2+3} \neq \sqrt{2} + \sqrt{5}}_{V}$ Vraie

Propriétés

① Si $a, b \geq 0$ alors $\sqrt{a.b} = \sqrt{a} . \sqrt{b}$

② Si $a \geq 0$, $b > 0$ alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ et $\frac{1}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{b}}$

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ mais : $\forall a, b > 0$, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

- $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$

$\sqrt{25} = 5 \qquad 3 + 4 = 7$

1-2-4. L'implication Logique : ($\Rightarrow$)

la définition mathématique est la suivante : L'assertion ($\bar{P} \vee Q$) est notée $P \Rightarrow Q$, on dit P implique Q ou bien Si P alors Q

$P \Rightarrow Q$ est fausse dans le seul cas (P est vraie et Q est fausse), Sinon ($P \Rightarrow Q$) est Vraie dans les autres Cas.

P	$\bar{P}$	Q	$\bar{P} \vee Q$ ($P \Rightarrow Q$)
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	V

Si P est Vraie, que doit l'être obligatoirement Q est Vraie.

Il est Impossible de Commencer, Correct et trouver l'erreur.

Le faux Peut donnée le faux ou le Vraie.

$$\boxed{\text{On a : } \overline{P \Rightarrow Q} = \overline{\bar{P} \vee Q} = \bar{\bar{P}} \wedge \bar{Q} = P \wedge \bar{Q}}$$

Exemples :

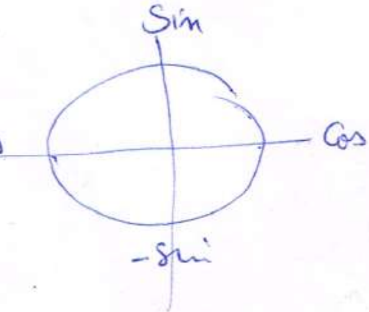
① Si $0 \leq x \leq 25 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 5$ est Vraie ?

On prend la racine carrée : $\sqrt{0} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{25} \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 5 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 5$.

② Si $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ est fausse ?

fausse puisque : pour tout $K \in \mathbb{Z}$ on a $\sin(K\pi) = 0$

donc $\theta = K\pi$ pas 0.



③ Si $\underbrace{3<2 \text{ et } 1<5}_{\text{faux}} \Rightarrow \underbrace{4<7}_{\text{Vraie}}$ Vraie ?

On Prend la Somme on trouve $3+1 < 2+5 \Rightarrow 4 < 7$ donc la Propriétée $P \Rightarrow Q$ est Vraie

④ Si $\underbrace{1>3 \text{ et } 1>4}_{\text{faux}} \Rightarrow \underbrace{2>7}_{\text{faux}}$ est Vraie ?

on prend la Somme : $1+1 > 3+4 \Rightarrow 2 > 7$; la Propriétée $P \Rightarrow Q$ est Vraie.

⑤ Si $A \subset F$ et $B \subset A \Rightarrow B \subset F$.

1-2-5- L'équivalence logique : ($\Leftrightarrow$) : $P \Leftrightarrow Q$ est l'assertion $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.
on dira P est équivalent à Q, notée $(P \Leftrightarrow Q)$. Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses.
la table de vérité est :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

exemple :

① $\forall x, x' \in \mathbb{R}$, $x \cdot x' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x' = 0$ _ vraie

② A, B, E trois ensembles.

$$\begin{matrix} A \subset E \\ B \subset E \end{matrix} \text{ et } A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$$

③ $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

Les quantificateurs :

$\forall$ (Quantificateur universel
محدد كلي)

① $\forall$: pour tout (quel que soit)

$\forall x \in E, P(x)$: pour tout x appartient à l'ensemble E, $P(x)$ est vraie. { Tout les éléments de E vérifiant $P(x)$

Exemple $\forall x \in \mathbb{N}, x + 1 > 0$.

($\exists$: Quantificateur existensiel)
محدد وجودي
$\exists x, P(x)$

② $\exists$: Il existe au moins :

par exemple : $\exists x \in E, x + 1 = 0$. il existe au moins un élément de l'ensemble E vérifier cette équation -

③ $\exists!$ il existe un unique

$\exists! x \in \mathbb{N}, x^2 - 1 = 0$

$$x = \begin{cases} -1 \notin \mathbb{N} \\ 1 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

④

Chapitre 1 : Méthodes du raisonnement mathématique :

Il existe plusieurs types de raisonnements, tout d'abord on commence par la plus classique :

I-1 : Raisonnement directe :

On veut montrer que l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie, on suppose que P est vraie, et on montre qu'alors Q est vraie.

Exemple : Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$, alors $a+b \in \mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels

Réponse : Prenons $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$. Rappelons que les rationnels $\mathbb{Q}$ sont l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$; Alors.

$a = \frac{p}{q}$; et $b = \frac{p'}{q'}$.

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs) الأعداد النسبية.

$\mathbb{Z}^*$ " " " " relatif sauf 0.

$p, p' \in \mathbb{Z}$ et $q, q' \in \mathbb{Z}^*$

On écrit alors $a+b$ comme la somme de deux fractions que l'on revien même dénominateur,

$a+b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq'+qp'}{q \cdot q'}$, or le numérateur $pq'+qp'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$ et $qq' \in \mathbb{Z}^*$.

Donc $a+b$ s'écrit sous la forme $a+b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$ et $q'' \in \mathbb{Z}^*$ Ainsi $a+b \in \mathbb{Q}$.

I-2 Raisonnement par Contraposition :

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :

L'assertion $P \Rightarrow Q$ est équivalente à non $Q \Rightarrow$ non P ; Donc pour montrer l'assertion $P \Rightarrow Q$: on suppose que non Q est vraie, et on montre qu'alors non P est vraie.

Exemple Soient x et y deux nombres réels, Démontrons que.

Si $x \neq y$ alors $(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

- Par contraposition. $\underbrace{(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)}_{*} \Rightarrow x = y$ $(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$.

Supposons que l'égalité * est vraie. c.à.d : *

on developpons, on trouve alors

$\cancel{xy} - x + y \cancel{-1} = \cancel{xy} + x - y \cancel{-1} \Rightarrow -x+y = x-y$

$\Rightarrow -x+y-x+y = 0 \Rightarrow -2x+2y = 0 \Rightarrow -2(x-y) = 0 \Rightarrow x-y = 0 \Rightarrow x = y$

Par contraposition, si $x \neq y$ alors $(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

I-3. Raisonnement par l'absurde :

Pour démontrer l'assertion $(P \Rightarrow Q)$, on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse, et on cherche une contradiction.

Exemple : Démontrons en raisonnant par l'absurde que :

$\forall a, b \geq 0$,

Si $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ Alors $a = b$

Démonstration : Nous raisonnons par l'absurde, en supposant :

$\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ et que $a \neq b$ et obtenons une <u>contradiction</u>.

Comme $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ $\Rightarrow a(1+a) = b(1+b)$

$\Rightarrow a + a^2 = b + b^2$

$\Rightarrow a^2 - b^2 = b - a$

$\Rightarrow (a-b)(a+b) = -(a-b)$. Comme $a \neq b$, on divisant par $a-b$, on obtient :

$a + b = -1$, Mais $a, b \geq 0$. Leurs somme ne peut donné un nbre négatif.

On obtient donc la contradiction recherché.

Conclusion : On a bien montrer que si

$\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ Alors $a = b$.

I-4 - Raisonnement par contre-exemple :

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type : $\forall x \in E$, $P(x)$ est vraie, par contre, pour montrer que cette assertion est fausse, il suffit de trouver x.

$\exists x \in E$, non $P(x)$ est fausse.

Trouver un tel x, c'est trouver un contre exemple à l'assertion $[\forall x \in E, P(x)]$

Exemple : Montrons que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 \neq 0$, est fausse.

Par contre exemple : $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 = 0$, est vraie.

Prenons $x = 1$ donc $1^2 - 1 = 0$. c.à.d le contre exemple est 1

D'où l'assertion n'est pas vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I-5- Raisonnement Par récurence :

Le Principe de récurrence Permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépend de n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La démonstration Par récurence se déroule en deux étapes :

① Initialisation : on Prouve que l'assertion est Vraie Pour $n=0$. $P(0)$ est Vraie.

② On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$ donné, $P(n)$ est vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1)$ est vraie.

Enfin, dans la Conclusion. On rappelle que Par le principe de récurrence $P(n)$ est Vraie Pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exemple : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.

Démonstration :

condition initiale : Pour $n=0$, on a $2^0 = 1 \geq 0$. c.à.d $P(0)$ est Vraie.

Condition final : On suppose que $P(n)$ est vraie. c.à.d $2^n \geq n$, et on démontre que l'assertion $P(n+1)$ ($2^{n+1} \geq n+1$) est Vraie.

On a : $2^{n+1} = 2^n . 2$

$= 2^n + 2^n$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $2^n \geq n$ (Par hypothèse.)

$\Rightarrow 2^{n+1} \geq n + 2^n$. et Puisque : $2^n \geq 1$

$\begin{cases} n=0 & 2^0 = 1 \\ n=1, & 2^1 = 2 \\ n=2, & 2^2 = 4 \\ \text{alors } 2^n \geq 1, & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Alors $2^{n+1} \geq n+1$ donc $P(n+1)$ est Vraie.

Ainsi $P(n)$ est Vraie. ($\forall n \in \mathbb{N}$. $2^n \geq n$).

Fin

Chapitre N°02 : Les ensembles, les relations binaires et les applications.

II.1. Théorie des ensembles :

Définition : Un ensemble est une collection d'objets. (ces objets sont appelés Elements de l'ensemble).

- x est un élément de l'ensemble E, on écrit : $x \in E$.
- x n'est pas un élément de l'ensemble E, on écrit $x \notin E$

Un ensemble est caractérisé par ses éléments.

Remarque : Deux ensemble E et F sont égaux s'ils ont les mêmes éléments, et on note $E = F$.

On peut décrire un ensemble de deux manières. Soit de manière explicite, soit en le définissant comme l'ensemble des éléments satisfaisant une certaine propriété.

Par exemple : 1ère L'ensemble E des entiers naturels allant de 3 à 7.

2ème $E = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ $= \{n \in \mathbb{N},\ 3 \leq n \leq 7\}$

- L'ensemble qui n'a aucun élément s'appelle ensemble vide, on le note $\phi = \{.\}$

* Parmi les ensembles les plus habitués à manipuler ou les plus importants sont des ensembles des nombres : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

- Il y a d'autres ensembles intéressants en mathématique : Par exemple :

- L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- " " Polynômes.
- " " des suites de réels qui convergent.
- " " des étudiants de l'université de BATNA

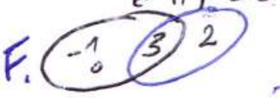
Définition : Le concept de nombre d'éléments d'un ensemble E s'appelle le Cardinal de E, et on note $Card(E)$. Par exemple : $Card(\emptyset) = 0$.

$Card(\{0, 1, 2\}) = 3$.

II-1-1 Opérations sur les ensembles : Soient E et $F \subset A$

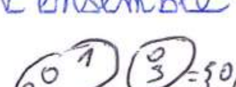
-a- Intersection ($\cap$) : l'intersection de deux ensembles E et F est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à E et à F.

$E \cap F = 3$



$$x \in E \cap F \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \in F) \quad ; \ (E \wedge F \text{ ; et logique})$$

-b- Union ($\cup$) : L'union de deux ensembles E et F est l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ou à F.



$= \{0,1,2,3\}$

$$x \in E \cup F \Leftrightarrow (x \in E \text{ ou } x \in F) \quad (E \vee F \text{ ou logique}).$$

Propriétés : ~~Soient E, F et G trois ensembles.~~

(1) $E \cap F = F \cap E$ et $E \cup F = F \cup E$ } On dit que l'intersection et l'union sont des opérations Commutatives.

(2) $E \cap \phi = \phi$ et $E \cup \phi = E$

(3) $E \cap E = E$ et $E \cup E = E$

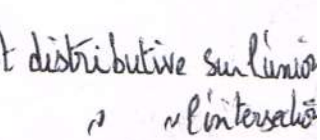
(4) $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G) = E \cap F \cap G$
et $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G) = E \cup F \cup G$ } On dit que l'intersection et l'union sont des opérations Associatives.

(5) $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$ } On dit que l'intersection est distributive sur l'union
et $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$ } " " l'union " " l'intersection

(6) $(E \cap F) \subset E$ et $(E \cap F) \subset F$. | (8) $E \cup F = E$ si et seulement si $F \subset E$

~~(7) $E \subset (E \cup F)$ et $F \subset (E \cup F)$~~ | et $E \cap F = E$ ssi $E \subset F$

-C- Inclusion ($\subset$) : On dit que E est inclus dans F et on écrit $E \subset F$, si tout éléments de E sont des éléments de F.



Lorsque E est inclus dans F, On dit que : (E est un sous ensemble (une Partie) de F) ; $E \subset F \Leftrightarrow \forall x \in E, x \in F$.

* deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si : A est inclus dans B et B est inclus dans A

$$E \subset F \text{ et } F \subset E \Leftrightarrow E = F \quad \text{(Equivalence Logique)}$$

* Si $A \subset E$ et $B \subset A \Rightarrow B \subset E$ (Implication logique)

* $A \subset A$.

-4- Différence de deux parties (l'ensemble E moins F)

Soient E et F deux ensembles. On appelle E moins F et on note $E \setminus F$ l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F, on a donc.

$$x \in E \setminus F \text{ ssi } (x \in E \text{ et } x \notin F)$$

Par exemple : $E = \{2,3,5\}$ et $F = \{1,2,3,7,9\}$, on a :

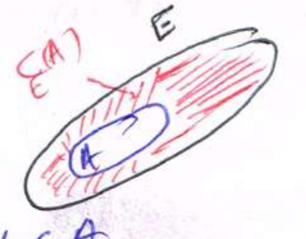
$E \setminus F = \{5\}$, et $F \setminus E = \{1,7,9\}$.

On a : $E \setminus \emptyset = E$ et $E \setminus E = \emptyset$. De plus. $E \subset F$ ssi $E \setminus F = \emptyset$.

-5- Complémentaire d'une partie :

Soit A une partie non vide de E.

L'ensemble $E \setminus A$ s'appelle aussi Complémentaire de A dans E. et on le note. $C_E(A)$ (on note aussi A^c ou $\bar{A}$)



$$x \in C_E(A) \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A).$$

Si $x \in E$:

- On a : $x \in C_E(A) \Leftrightarrow x \notin A$. et $x \notin C_E(A) \Leftrightarrow x \in A$.

Exemple : Soit $E = \{1,2,3,4,5\}$ et soit $A = \{2,3\}$.

On a alors $C_E(A) = \{1,4,5\}$

et $C_E(C_E(A)) = \{2,3\} = A$

Autre exemple :
Soit $E = \mathbb{R}^+$ et $A = [1,2] \subset \mathbb{R}^+$
$C_{\mathbb{R}}^+(A) = \{x \in \mathbb{R}^+, x \notin [1,2]\}$
$= [0,1[\cup]2,+\infty[$

- Proposition : ① Soit $A \subset E$, on a : $C_E(C_E(A)) = A$

C.à.d. Le complémentaire du complémentaire est l'ensemble de départ.

② Soit E un ensemble, et soient A et B des parties de E.

$$A \subset B \Leftrightarrow C_E(B) \subset C_E(A).$$

③ $C_E(\emptyset) = E$ et $C_E(E) = \emptyset$

④ $A \cup C(A) = E$ et $A \cap C(A) = \emptyset$

Démonstration 2

-1- Soit $A \subset E$, on a $C_E(C_E(A)) = A$

Soit $x \in E$. on a $x \in C_E(C_E(A))$ ssi non$(x \in C_E(A))$

et comme. $x \in E$, $x \in C_E(A)$ ssi non$(x \in A)$

On obtient donc : $x \in C_E\left(C_E(A)\right)$ ssi non(non$(x \in A)$). C'est à dire

ssi $x \in A$. puisqu'une double négation est équivalente à une absence de négation :

-2- Preuve. $A, B \subset E$, $A \subset B \Leftrightarrow C_E(B) \subset C_E(A)$

a- Supposons $A \subset B$. Montrons que si $A \subset B \Rightarrow C_E(B) \subset C_E(A)$

Soit $x \in C_E(B)$, on a donc $x \in E$, $x \notin B$

et comme $A \subset B$ donc $x \notin A$, or $x \in E$

Donc $x \in C_E(A)$

D'où $C_E(B) \subset C_E(A)$

b- Montrons que $C_E(B) \subset C_E(A) \Rightarrow A \subset B$

$A, B, C(A)$ et $C(B)$ sont des parties de E

$C_E(B) \subset C_E(A)$ ssi $\forall x \in E$, si $x \notin B$ alors $x \notin A$

$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow$ non$P \vee Q$

si non$(x \notin B)$ ou $x \notin A$.

si $x \in B$ ou non$(x \in A)$

si non$(x \in A)$ ou $x \in B$

si $x \in A$ alors $x \in B$.

c'à'd ssi $A \subset B$

On a bien montrer que $C_E(B) \subset C_E(A) \Rightarrow A \subset B$

Finalement $A \subset B \Leftrightarrow C_E(B) \subset C_E(A)$

- Complémentaire de l'union et de l'intersection :

Soient A et B deux sous-ensembles de E. On a.

En notant $\overline{A} = C_E(A)$ et $\overline{B} = C_E(B)$, Alors

① $C_E(A \cup B) = \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ c-à-d. le complémentaire de l'union est l'intersection des complémentaires

② $C_E(A \cap B) = \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ Le complémentaire de l'intersection est l'union des complémentaires.

Preuve: (1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Soit $x \in \overline{A \cup B}$, on a $x \in E$, et non ($x \in A$ ou $x \in B$)

Donc non($x \in A$) et non ($x \in B$)

$\overline{A} \cap \overline{B}$.

on a donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

Réciproquement :

Soit $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ on a d'une part

$x \in E$ d'autre part ($x \in \overline{A}$) et ($x \in \overline{B}$)

Donc non($x \in A$) et non ($x \in B$)

Donc non ($x \in A$ ou $x \in B$)

D'où non ($x \in A \cup B$)

$x \in \overline{A \cup B}$.

On a donc $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$

Donc par double inclusion : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Remarque : Un objet n'est pas dans l'union de A et de B s'il n'est ni dans A ni dans B

et Un objet n'est pas dans l'intersection de A et de B s'il n'est pas dans A ou s'il n'est pas dans B

II-1-2

3) L'ensemble des Parties d'un ensemble : Soit A un ensemble,

L'ensemble des Parties de A est l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de A, il est noté $\mathcal{P}(A)$. Remarque : l'ensemble ϕ et A sont des éléments de $\mathcal{P}(A)$.

Proposition : Si $Card(A) = n \in \mathbb{N}$, alors : $Card(\mathcal{P}(A)) = 2^n$.

Exemple : $A = \{1, 2\}$.

On a $Card(A) = 2$ et $Card(\mathcal{P}(A)) = 2^2 = 4$.

donc $\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

② Si on prend $\phi = \{\ \}$
$\mathcal{P}(\phi) = \{\phi\}$.

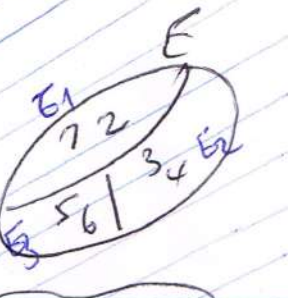
Propriétés : $\mathcal{P}(\phi) = \{\phi\}$.

Soient A, B et C des Parties de E,

① $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
② $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ } (Associativité).

③ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
④ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ } (Distributivité)

⑤ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$



* Partitions d'un ensemble :

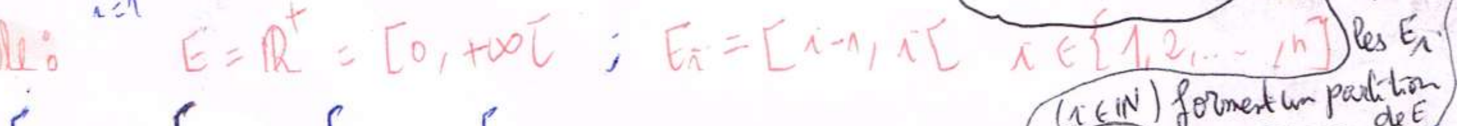
Etant donné l'ensemble E ; $E_1, E_2, \dots, E_n$ des Parties de E.

On dit que les $(E_i)_{1 \le i \le n}$ réalisent une Partition de E si on a :

① $\forall i = \overline{1,n}$, $E_i \neq \phi$.
② $E_i \cap E_j = \phi$ $\forall i, j$ et $i \neq j$
③ $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$

Par exemple :
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$E_1 = \{1, 2\}$ $E_2 = \{3, 4\}$, $E_3 = \{5, 6\}$
~~on a $E_i \neq \phi$~~
On a $E_1, E_2, E_3 \subset E$
et $E_i \neq \phi$
$E_1 \cap E_2 = \phi$, $E_2 \cap E_3 = \phi$, $E_1 \cap E_3 = \phi$
et $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = E$
donc les E_i $(i \in \mathbb{N})$ forment une partition de E

Exemple : $E = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$; $E_i = [i-1, i[$ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$



①
$E_1 = [0, 1[$ $\neq \phi$
$E_2 = [1, 2[$ $\neq \phi$
$E_3 = [2, 3[$ $\neq \phi$
⋮
$E_n = [n-1, n[$ $\neq \phi$

$E_1 \cap E_2 = \phi$; $E_2 \cap E_3 = \phi$ .... $E_{n-1} \cap E_n = \phi$

et on a $E_i \cap E_j = \phi$ ②

Ainsi $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_n = E = \mathbb{R}^+$

donc $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$

donc les E_i $(i \in \mathbb{N})$ forment une Partition de $[0, +\infty[$.

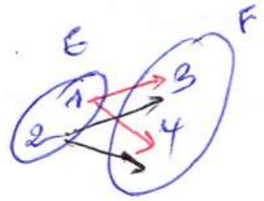
$(A, \bar{A})$ une partition de E

$]-\infty, 1[$, $[1, 5[$, $[5, +\infty[$ partition de $\mathbb{R}$

II.1.3 - Produit Cartésien de deux ensembles :

Soient E et F deux ensembles, On appelle Produit Cartésien de E Par F noté $(E \times F)$ l'ensemble des Couples (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$.

$$E \times F = \{(x, y) \ / \ x \in E \text{ et } y \in F\}$$



*** Cardinal du Produit Cartésien $E \times F$:**

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F).$$

Exemple : ① $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$ $E \times F = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ - (Le Plan.)

② $E = \{1, 2\}$; $F = \{3, 4\}$

$\text{Card}(E) = 2$ $\text{Card}(F) = 2$ alors $\text{Card}(E \times F) = 2 \times 2 = 4$.

$E \times F = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$.

Propriétés : $A \times A =$ noté A^2 et $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$ se note A^n.

Soient E et F deux ensembles ;
Soit $A, B \subset E$ et $C \subset F$

① $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

② $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

③ A, B deux ensembles.

On a $A \times B \neq B \times A$.

Le produit Cartésien n'est pas Commutatif

$\boxed{A \times B = B \times A \text{ ssi } A = B}$

④ $A \times \emptyset = \emptyset$.
$\emptyset \times A = \emptyset$

* $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ / \ x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n\}$

Remarque :

* On a pour deux couples (x_1, y_1), (x_2, y_2) alors si

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

* On a $(x, y) \neq (y, x)$ pour $x \neq y$

Démonstration : $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

$\forall (x, y) \in (A \cap B) \times C \Rightarrow x \in A \cap B$ et $y \in C \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in B$ et $y \in C$

$\Rightarrow \underbrace{x \in A \text{ et } y \in C}_{(A \times C)}$ et $\underbrace{x \in B \text{ et } y \in C}_{\cap (B \times C)}$

donc $(A \cap B) \times C \subset (A \times C) \cap (B \times C)$ ——— ①

Réciproquement

$$(A\times C)\cap(B\times C)\subset(A\cap B)\times C$$

$\forall (x,y)\in (A\times C)\cap(B\times C)$

$\Rightarrow (x,y)\in A\times C$ et $(x,y)\in (B\times C)$

$\Rightarrow (x\in A$ et $y\in C)$ et $(x\in B$ et $y\in C)$

$\Rightarrow x\in A\cap B$ et $y\in C$

$\Rightarrow (x,y)\in (A\cap B)\times C$

donc $(A\times C)\cap(B\times C)\subset(A\cap B)\times C$ — ②

de ① et ② on a

$$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$$

Exemple : $A = \{8, 4, 6\}$, $B = \{6, 7\}$ et $C = \{7\}$.

- Trouver $A \times (B \cap C)$
- Trouver $(A \times B) \cap (A \times C)$.

Réponse : $A \times (B \cap C) = ?$

on a $\left|\right.$ $\text{Card } A = 3$. et $B \cap C = \{7\}$ donc $\text{Card } (B \cap C) = 1$

Ainsi $\text{Card } A \times (B \cap C) = 3 . 1 = 3$

D'où $A \times (B \cap C) = \{(8, 7), (4, 7), (6, 7)\}$.

$(A \times B) \cap (A \times C) = ?$

alors $\text{Card}(A) = 3$, $\text{Card}(B) = 2$, donc $\text{Card}(A \times B) = 3 . 2 = 6$

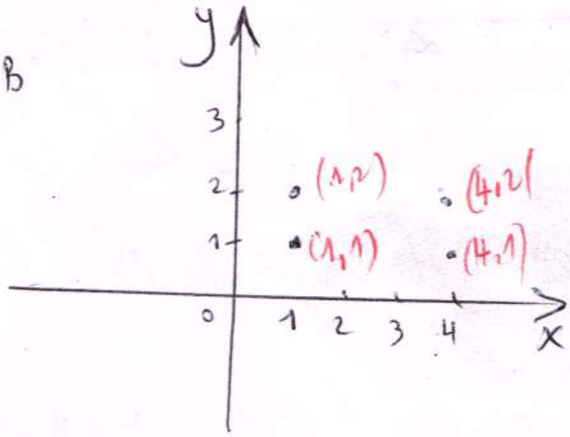
$A \times B = \{(8, 6), (8, 7), (4, 6), (4, 7), (6, 6), (6, 7)\}$.

de même. $\text{Card } A = 3$. $\text{card } C = 1$ donc $\text{Card } (A \times C) = 3 . 1 = 3$

$A \times C = \{(8, 7), (4, 7), (6, 7)\}$.

$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(8, 7), (4, 7), (6, 7)\} = A \times (B \cap C)$.

Exemple : En utilisant le repère Cartésien ci-dessous. Déterminez la relation $A \times B$ (c.à.d. trouver A et B).



$A = \{1, 4\}$ et $B = \{1, 2\}$

Ainsi $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (4, 1), (4, 2)\}$.

$A \times B = \{(a, b) , a \in A \text{ et } b \in B\}$

Quelques propriétés évidentes :
Soient A, B et C trois ensembles, Alors

1) Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $\begin{cases} A \subset C \\ A \cup B \subset C. \end{cases}$

2) $A \cap B \subset A$ et $A \subset A \cup B$

$B \cap A \subset A$ $B \subset A \cup B$

3) $A \neq \phi$ ou $B \neq \phi$ $\Leftrightarrow$ $A \cup B \neq \phi$.

4) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

5)

Si $A \subset B$ Alors. $\forall C$ on a : $A \subset (B \cup C)$ et $(A \cap C) \subset B$.

6) $A \cup B = A$ ssi $B \subset A$

$A \cap B = A$ ssi $A \subset B$

7) $A \subset B$ ssi $A \setminus B = \phi$

8) $A \subset B$ et $B \subset A \Leftrightarrow A = B$

III Relations binaires : (العلاقات الثنائية)

Déf Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une partie de $E \times E$, si pour tout $x \in E$, pour tout $y \in E$, le couple $(x,y) \in \mathcal{R}$, on dit que x est en relation avec y par $\mathcal{R}$ et on écrit $x \mathcal{R} y$. {$\mathcal{R}$ est appelée relation binaire dans E}

Exp ① $\forall x, y \in E$, $E = \{0, 1, 2, 3\}$

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = y$ ou $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \boxed{x \geq y}$ $\boxed{x < y}$

l'égalité est une relation binaire qui relie x et y ssi qu'ils sont identiques.

$E \times E = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3)$
$(3,0), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = y$: $\rho = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$.

② soient A et B deux parties de E

$A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \subset B$, l'inclusion est une relation binaire qui relie A et B ssi tous les éléments de A sont également des éléments de B.

III-1 Propriétés

Étant donné une relation binaire R sur E,

① R est Reflexive (انعكاسية) : Si $\forall x \in E$, xRx.

$E = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x = y$

on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = x \Leftrightarrow xRx$

$E = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x^2 - x^2 = 0 \\ x - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - x^2 = x - x$

$\Leftrightarrow xRx$

$E = \mathbb{N}$, $xRy :\Leftrightarrow x = y - 1$

$\forall x \in \mathbb{N}$, $xRx \Leftrightarrow x = x - 1$ faux. donc R n'est pas réflexive

② R est symétrique (التماثل) : Si $\forall x, y \in E$, $xRy \Rightarrow yRx$

$E = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x = y$

$xRy \Leftrightarrow x = y \Rightarrow y = x$

$\Rightarrow yRx$

$E = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

$\Rightarrow \cancel{-}(y^2 - x^2) = \cancel{-}(y - x)$

$\Rightarrow y^2 - x^2 = y - x$

$\Rightarrow yRx$ donc R est symétrique

$E = \mathbb{N}$, $xRy \Leftrightarrow x > y$.

$\forall x, y \in \mathbb{N}$, $x > y \Rightarrow y > x$ faux

③ R est transitive (متعدي) : $\forall x, y, z \in E$, $(xRy$ et $yRz \Rightarrow xRz)$

$E = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x = y$

$yRz \Rightarrow y = z$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x = y$ et $y = z$

$\Rightarrow x = z \Rightarrow xRz$

$E = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$ ~ ①

et $yRz \Leftrightarrow y^2 - z^2 = y - z$ ~ ②

$\Rightarrow x^2 - z^2 = x - z$

$\Rightarrow xRz$. transitive

$E = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x = y - 1$ ~ ① $\Rightarrow x = z - 1 - 1$

et $yRz \Leftrightarrow y = z - 1$ ~ ② $x = z - 2$ faux n'est pas transitive.

④ R est Antisymétrique : si $\forall x, y \in E$, $(xRy$ et $yRx) \Rightarrow x = y$.

عبر تماثلي

$E = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x \geq y$

$x \geq y$ et $y \geq x \Rightarrow x = y$ - Antisymé

$E = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow \sin x = \sin y$

$\begin{cases} xRy \Leftrightarrow \sin x = \sin y \\ yRx \Leftrightarrow \sin y = \sin x \end{cases}$

$\sin x = \sin y \not\Rightarrow x = y$

$\sin 0 = \sin \pi = 0$

$0 \neq \pi$

Relation d'équivalence :

Déf : Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite relation d'équivalence si $\mathcal{R}$ est à la fois : reflexive, symétrique et transitive.

exp * $x, y \in \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = y$. une relation d'équivalence.

* $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$ " "

* $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des droites d'un plan qui est donnée par $D \mathcal{R} D' \Leftrightarrow D$ en parallèl D'.

Classe d'équivalence : (صنف التكافؤ)

Soit E muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$, soit $a \in E$, on appelle classe d'équivalence de a et on note C_a ou $\dot{a}$ le sous ensemble de E défini par :

$$C_a = \dot{a} = \{x \in E,\ x \mathcal{R} a\}.$$ (مجموعة كل العناصر التي لها علاقة مع a).

exp. $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$. c'est une relation d'équivalence.

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= \{x \in \mathbb{Z},\ x \mathcal{R} a\} = \{x \in \mathbb{Z},\ x^2 - a^2 = x - a\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z},\ (x-a)(x+a) - (x-a) = 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z},\ (x-a)(x+a-1) = 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z},\ x - a = 0 \text{ ou } x + a - 1 = 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z},\ x = a \text{ ou } x = 1 - a\}.
\end{aligned}$$

$$\dot{a} = \{a, 1-a\}.$$

$$\begin{aligned}
\dot{1} &= \{x \in \mathbb{Z}.\ x \mathcal{R} 1\} \\
&= \{x^2 - 1 = x - 1\} \\
&= \{x^2 - x = 0\} \\
&= \{x(x-1) = 0\} \\
&= \{x = 0 \text{ ou } x = 1\}
\end{aligned}$$

$$\dot{1} = \{0, 1\}.$$

$1 \mathcal{R} 0 \Leftrightarrow 1 - 0 = 1 - 0$ vraie

$1 \mathcal{R} 1 \Leftrightarrow 1^2 - 1^2 = 1 - 1$ vraie

Propriétés : Etant donné une relation d'équivalence R sur E, ① $\forall a \in E$, $a \in \dot{a}$.

② xRy alors. $\dot{x} = \dot{y}$.

exp notre exemple. $\forall x,y \in \mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

on a trouver que. $\dot{a} = \{x \in \mathbb{Z},\ xRa\} = \{a, 1-a\}$.

$\dot{0} = \{0,1\}$ $0R1 \Leftrightarrow \dot{0} = \dot{1}$

$\dot{1} = \{1,0\}$; $1R0 \Leftrightarrow \dot{1} = \dot{0}$.

$\dot{2} = \{2,-1\}$. $2R-1 \Leftrightarrow \dot{2} = \dot{-1}$

$\dot{3} = \{3,-2\}$ $3R-2 \Leftrightarrow \dot{3} = \dot{-2}$

$\dot{0} = \{x \in \mathbb{Z},\ xR0\}$

$xR0 \Leftrightarrow x^2 - 0^2 = x - 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$

$\dot{0} = \{0, 1\}$.

③ Les classes d'équivalences d'un ensbl E sont disjointes ou $\boxed{\text{confondues.}}$ soit a, a' deux classes d'équi dans E. $\dot{a} \cap \dot{a}' = \phi$.

Ensemble quotient :

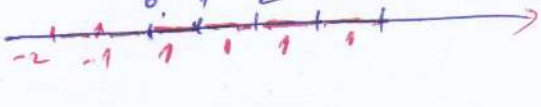
soit E un ensble muni d'une relation d'équivalence R on appelle ensble quotient de E par R, l'ensemble des classes d'équivalence de E. et on note : $E/R = \{\dot{a} \ / \ a \in E\}$.

$\forall x,y \in \mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$. $\dot{a} = \{a, 1-a\}$.

$\mathbb{Z}/R = \{\{a, 1-a\},\ a \in \mathbb{Z}\}$. $= \{\dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \ldots\}$

Propriétés : les classes d'équivalence forment une partition de E

$E = \bigcup_{a \in E} \dot{a}$: $\dot{1} \cup \dot{2} \cup \dot{3} \cup \ldots = E$



III.3. Relation d'ordre : علاقة الترتيب

Def Une relation binaire R sur un ensemble E est dite relation d'ordre si R est à la fois reflexive, Antisymétrique et transitive.

* la relation Inclusion est une relation d'ordre.

Exemple $E = \mathbb{R}$, la relation définie par

$$x R y \Leftrightarrow x \leq y$$. est une relation d'ordre ?

① R reflexive, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$ vraie reflexive $\Leftrightarrow x R x$

② R est antisymétrique :

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $(x R y$ et $y R x) \Rightarrow x = y$

$$\left\{ \begin{array}{l} x R y \Leftrightarrow x \leq y \\ y R x \Leftrightarrow y \leq x \end{array} \right\} \Rightarrow x = y \Rightarrow R \text{ antisymétrique}$$

③ R transitive.

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x R y$ et $y R z \Rightarrow x R z$

$$\left\{ \begin{array}{l} x R y \\ y R z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq y \\ y \leq z \end{array} \right. \Rightarrow x \leq z \Rightarrow x R z \text{ transitive}$$

Alors R est une relation d'ordre.

Relation d'ordre Total :

$\mathbb{R}$ n'est pas bien ordonné,

$\mathbb{Z}$ est bien ordonné

Une relation d'ordre R sur E est <u>Totale</u> si :

$\forall x, y \in E$ on a $x R y$ ou $y R x$.

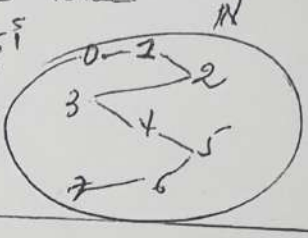
Dans le cas contraire, on dit que l'ordre est <u>Partiel</u>.

c.à.d. $\exists \alpha, \beta \in E$ tq on a ni $\alpha R \beta$ ni $\beta R \alpha$.

Exemple :

① $E = \mathbb{N}$. $x R y \Leftrightarrow x \leq y$ c'est une relation d'ordre total.

أيّ عنصرين من المجموعة $\mathbb{N}$
عندهم علاقة إمّا في
الاتجاهين



② Soit R une relation définie par :

$\forall x, y \in \mathbb{N}^*$, $\exists K \in \mathbb{N}^* / x = K y$.

R est une relation d'ordre :

(a) R Réflexive si $\forall x \in \mathbb{N}^*$, $x R x$.

On a $\forall x \in \mathbb{N}^*$, $x R x \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{N} / x = K x$, Pour $K = 1 \in \mathbb{N}^*$, R réflexive

(b) R Antisymétrique $\forall x, y \in \mathbb{N}^*$. $x R y$ et $y R x \Rightarrow x = y$

$$\left.\begin{array}{l} x R y \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{N}^*, x = K y \\ y R x \Leftrightarrow \exists K' \in \mathbb{N}^*, y = K' x \end{array}\right\} \Rightarrow x = K K' x \Rightarrow K K' = 1 \Rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ K' = 1 \end{cases}$$

alors $K = 1 \Rightarrow x = y$
$K' = 1 \Rightarrow y = x$. donc R Antisymétrique

(c) R transitive : $\forall x, y, z \in \mathbb{N}^*$, $x R y$ et $y R z \Rightarrow x R z$

$$\left.\begin{array}{l} x R y \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{N}^*, x = K y \\ y R z \Leftrightarrow \exists K' \in \mathbb{N}^*, y = K' z \end{array}\right\} \Rightarrow x = K K' z \Rightarrow x = K'' z$$

donc $\exists K'' = K K' \in \mathbb{N}^*$ $x R z$ / R transitive

— Est ce que l'ordre est <u>total</u> ou Partiel.

نخير أيّا رقمين عندهم علاقة على الأقل واحدة و

l'ordre est Partiel.

$x = 2$ et $y = 11$

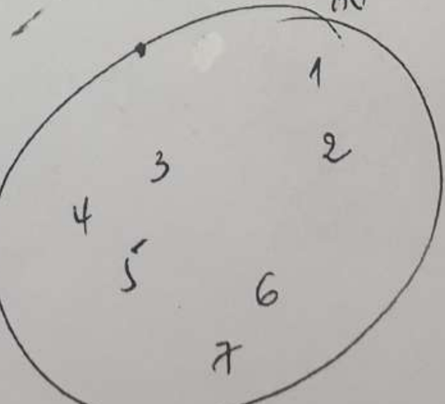
$2 \not R 11$ et $11 \not R 2$

$\{$ $x R y$ ou $y R x$

$8 = 4 . 2$ ✓

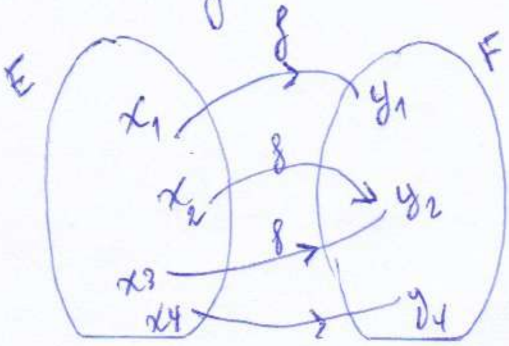
$2 = K . 8$

Antisymétrique

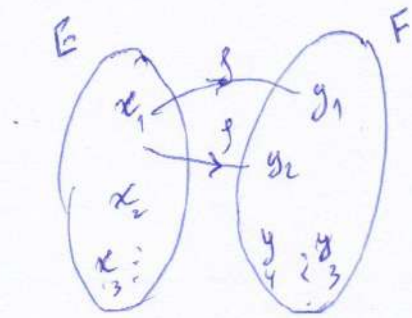


II.2 - Application d'un ensemble dans un autre :

II-2-1 - Définition : Soient E et F deux ensembles, On appelle Application ou fonction $f : E \longrightarrow F$. C'est associé à chaque élément x de E un unique élément y de F. التطبيقة يعطي لكل عنصر من E صورة في F



C'est une application



Ce n'est pas une application

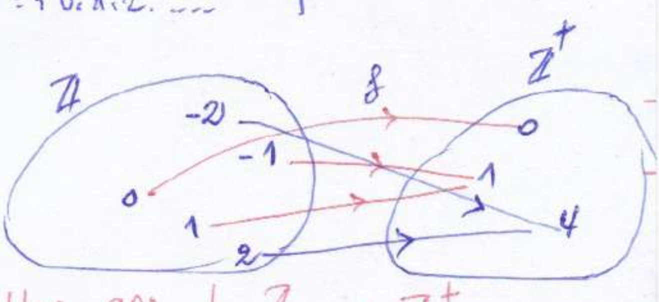
- L'élément $y \in F$ correspondant à x par f noté $y = f(x)$, on dit que y est l'image de x par f.
- L'élément x tel que : $y = f(x)$ s'appelle antécédent (سابقة) de y par f.
- E est appellé l'ensemble de Départ, F l'ensemble d'Arrivé de f.

Exemple : ① $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^+$
$x \longmapsto x^2$.

$\mathbb{Z} = \{ \dots \quad -1, 0, 1, 2, \dots \}$
$\mathbb{Z}^+ = \{ 0, 1, 2, \dots \}$

$$y = f(x) = x^2.$$

$x = -2 \Rightarrow f(-2) = 4$; $x = 2 \Rightarrow f(2) = 4$
$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 1$; $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$
$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$



Une app de $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$

Pour trouver l'image de -2 on calcule $f(-2)$, c.à.d remplacer x par -2, on a alors ;

Note : Un antécédent n'a qu'une seul unique image ; Mais une image peut avoir plusieurs antécédent

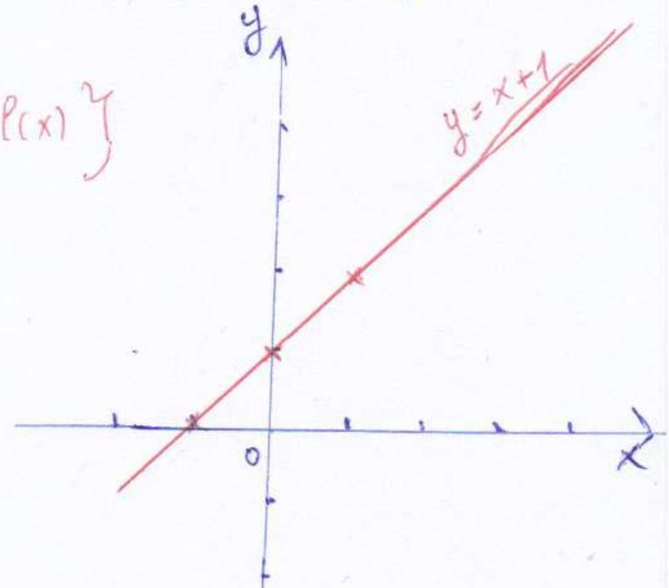
② Application constante : $h : E \longrightarrow F$
$x \longmapsto h(x) = c$. ou $c \in \mathbb{R}$ donné.

③ L'application identité : $I_E : E \longrightarrow F$
$x \longmapsto I_E(x) = x$.

II.2.2. Graphe d'une application :

Etant donné une application : $f : E \longrightarrow F$. On appelle le graphe fonctionnel de f l'ensemble des couples :

$$G = \{ (x, f(x)) \in E \times F \ , \ y = f(x) \}$$



Exemple : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x+1$

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 0$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2$

II.2.3. Application Composée :

Soit E, F et H trois ensembles.

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow H$ deux applications.

- On appelle Application Composée de g et f l'application de E dans H, notée $g \circ f$ qui est définie par : $g \circ f : E \longrightarrow H$

$x \longmapsto g(f(x))$

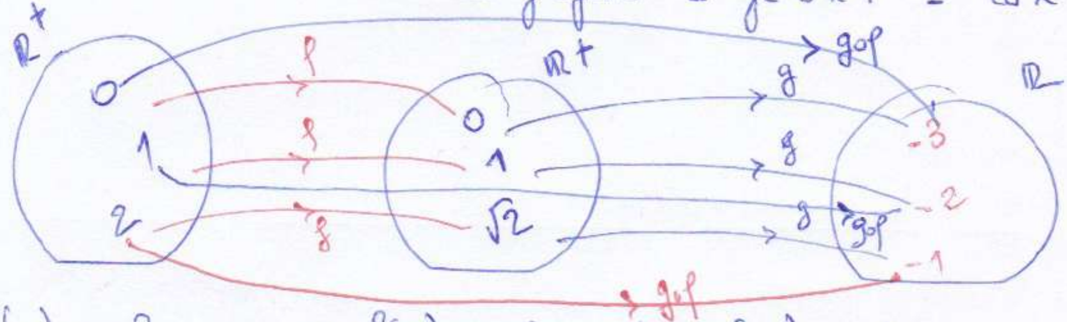
Exemple :

$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ $\qquad$ $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \sqrt{x}$. $\qquad$ $x \longmapsto g(x) = x^2 - 3$

Alors $g \circ f(x) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 3 = x - 3$.



$g \circ f(0) = -3$; $g \circ f(1) = -2$ et $g \circ f(2) = -1$

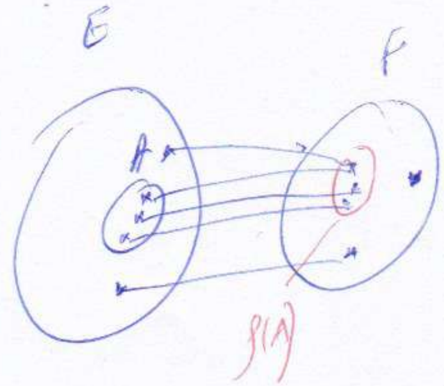
II_2_4 Image directe, Image réciproque :

ⓐ Image directe :

Soit $f : E \longrightarrow F$, et soit A une partie de E $(A \subset E)$, On appelle Image directe de A par f le sous ensemble $f(A)$ de F défini par :

$$f(A) = \{ y \in F \,,\, \exists x \in A \,.\, y = f(x) \}$$
$$= \{ f(x) \,/\, x \in A \}$$

مجموعة الصور $f(x)$ حيث x ينتمي إلى A



Propriétés :

$f : E \longrightarrow F$, et soient A et B deux sous ensembles de E. On a :

① Si $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

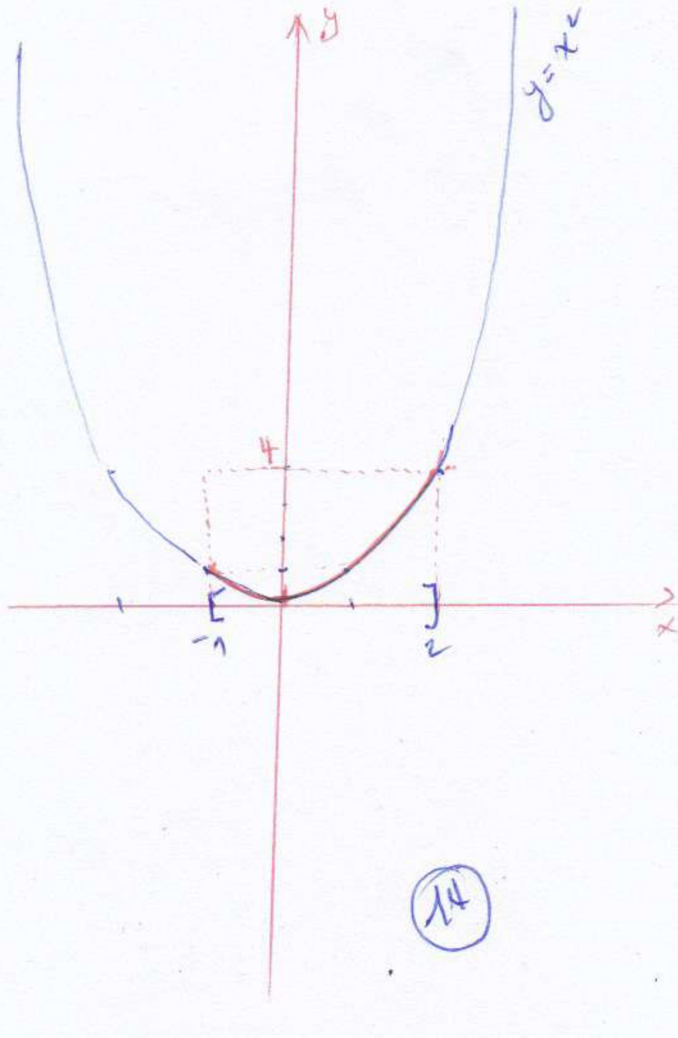
② $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

③ $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$x \longmapsto f(x) = x^2$

et soit $A = [-1, 2]$, Donné $f(A)$.



Réponse :

Lorsque x varie de -1 à 2

les images variées de 0 à 4

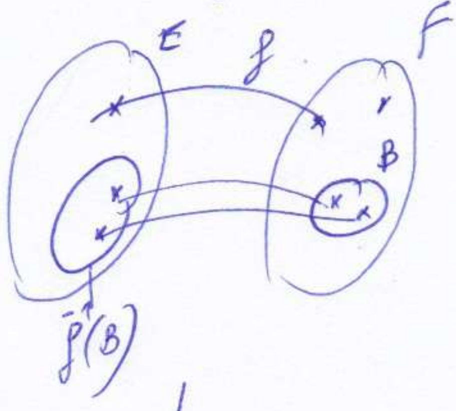
Alors $f([-1,2]) = [0,4]$

(b) : Image réciproque :

Soit $f : E \longrightarrow F$ et soit B un sous-ensemble de F ($B \subset F$).

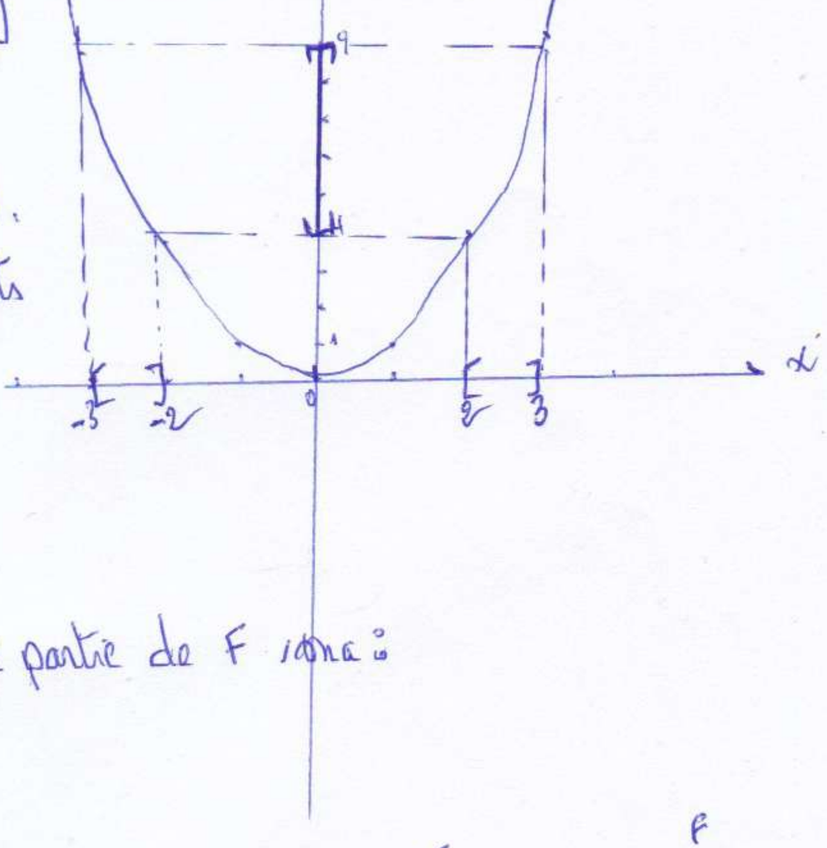
On appelle Image réciproque de B par f, le sous-ensemble $f^{-1}(B)$ de E défini par :

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E \ / \ f(x) = B \}$$



Exemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$
$x \longmapsto f(x) = x^2$

et soit $B = [4, 9]$: donné $f^{-1}(B)$



Réponse :

Lorsque, les images variés de 4 à 9. alors on remarque que les antécédants variés de $[-3, -2]$ union $[2, 3]$.

Donc $f^{-1}(B) = [-3, -2] \cup [2, 3]$.

Propriétés :

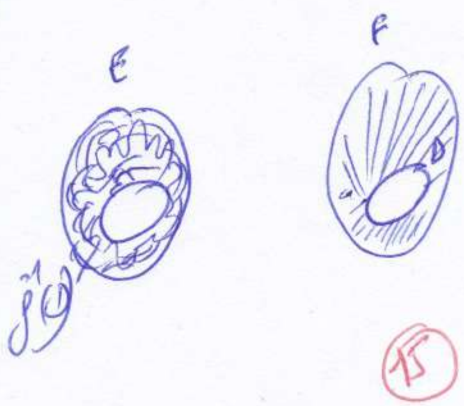
Soit $f : E \to F$, et soit : C, D deux partie de F, alors :

① $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

② $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

③ $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

④ $f^{-1}(C_F^D) = C_E^{f^{-1}(D)}$

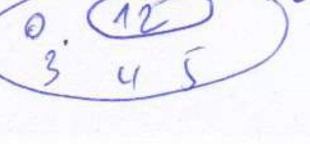


Le complémentaire : si $D \subset F$

$$C_F^D = \{ x \in F \mid x \notin D \}$$

Par exemple soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et soit $A = \{1, 2\}$ ($A \subset E$).

$C_E^A = \{ x \in E / x \notin A \}$
$= \{0, 3, 4, 5\}$.



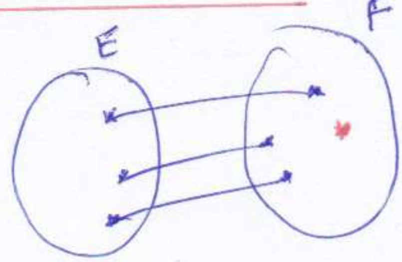
II.2.5. Application Injective, Surjective et Bijective :

a) Application Injective : (تطبيق متباين)

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est injective, si tout élément y de f possède au plus un antécédent par f.

c.à.d : $\forall y \in F$, $y = f(x)$ admet une ou aucune solution. Autrement dit :

$$\boxed{f \text{ est injective} \iff \forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.}$$



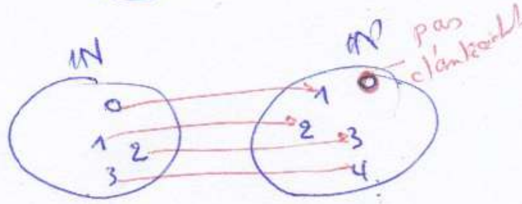
Exemple : $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto f(n) = n + 1$

f est injective $\iff \forall n, n' \in \mathbb{N}$, $f(n) = f(n') \Rightarrow n = n'$.

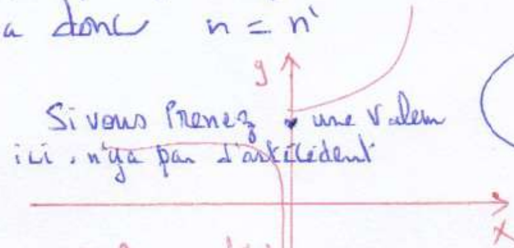
Soient $n, n' \in \mathbb{N}$, on suppose que $f(n) = f(n')$.

$\Rightarrow n + 1 = n' + 1$ et on a donc $n = n'$

Alors $f(n)$ est injective.



Par exemple sur le graphe :



b) Application Surjective (تطبيق غامر)

Soit $f : E \to F$. On dit que f est surjective, si tout élément y de F possède au moins un antécédent.

$$\boxed{f \text{ est surjective} \iff \forall y \in F,\ \exists x \in E \text{ tq } y = f(x) \iff f(E) = F}$$

Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
$x \mapsto f(x) = x^2$.

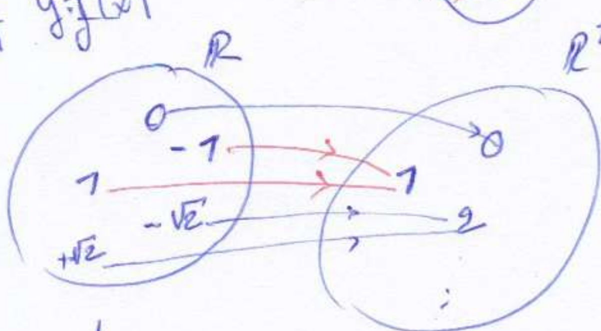
f est surjective $\iff \forall y \in \mathbb{R}^+$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tq $y = f(x)$

$\Rightarrow y = x^2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{y} \in \mathbb{R}$.

$0 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 0 = x^2 \Rightarrow x = 0 \in \mathbb{R}$

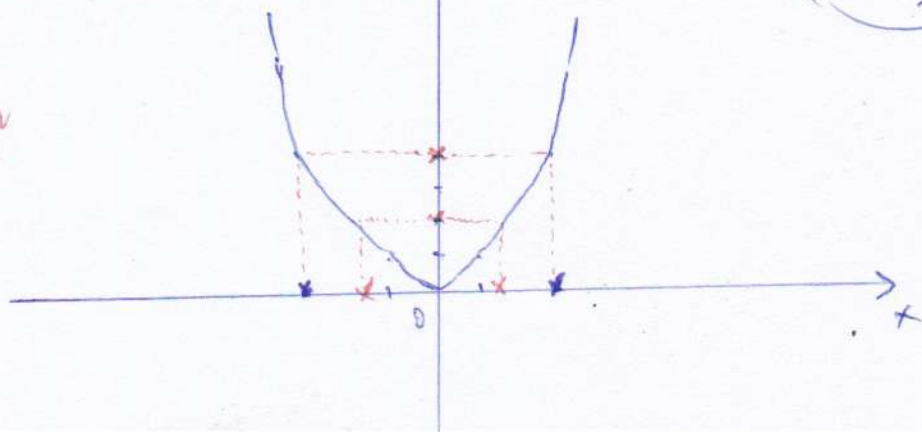
$1 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 1 = x^2 \Rightarrow x = \mp 1 \in \mathbb{R}$

$2 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 2 = x^2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{2} \in \mathbb{R}$



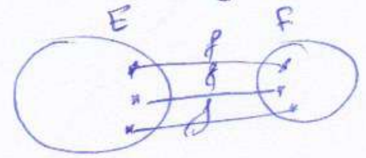
sur le graphe :

$f(x) = x^2$



D : Application bijective. (تطبيق تقابلي) :

Soit $f : E \to F$ une application, On dit que f est bijective, si f à la fois injective et surjective.



$$\boxed{\forall y \in F \;/\; \exists! x \in E \text{ tq } y = f(x)}$$

Il existe un unique x.

Autrement dit. l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution

---

Cette fct est surj, puisque tout les points de l'espace d'arrivé sont atteint par un point de l'espace de départ. et injective, puisque deux points de l'espace de depart n'arrive pas à la même point de arrivé.

Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = 2x + 3$.

Montrons que f est bijective ?

Méthode 1 _ f est bijective $\Leftrightarrow$ f est injective et surjective

① f est injective $\Leftrightarrow \forall x, x', f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

_ Soit $x, x' \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x')$

$\Rightarrow 2x + 3 = 2x' + 3 \Rightarrow x = x'$. f injective

② f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$

_ Soit $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) \Rightarrow y = 2x + 3$

$\Rightarrow x = \dfrac{y-3}{2} \in \mathbb{R}$. f surjective

de ① et ② . donc f est bijective.

Méthode 2.

f est bijective $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \exists! x \in \mathbb{R}$, $y = f(x)$.

donc $\forall y \in \mathbb{R}$ $y = f(x)$

$y = 2x + 3 \Rightarrow 2x = y - 3$

$\Rightarrow x = \dfrac{y-3}{2}$

Cette solution est unique.

Alors f est bijective.

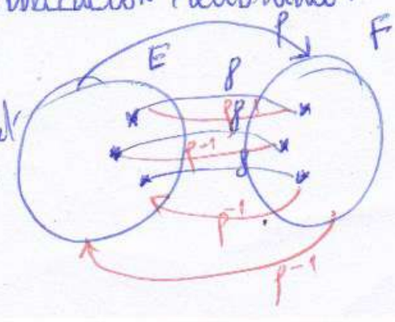
_ Propriétés : _ $f : E \to F$ et $g : F \to G$. et $g \circ f : E \to G$
$x \mapsto g(f(x))$,

Si f et g sont les deux injectives (respectivement surjectives, bijectives) Alors l'application composée $g \circ f$ est aussi injective (resp. surjective, bijective).

II _ 2 _ 6. APPLICATION Réciproque : (التطبيق العكسي)

Soit l'application bijective $f : E \to F$, $x \mapsto y = f(x)$, càd $y = f(x)$ admet une unique solution),

L'application $f^{-1} : F \to E$
$y \mapsto f^{-1}(y) = x$
est appelée Application réciproque.



L'exemple Précédent : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = 2x + 3$
est bijective $\Rightarrow$ admet une app réciproque

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$y \mapsto f^{-1}(y) = x$
; $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in \mathbb{R}$ tq $x = f^{-1}(y)$
$x = \dfrac{y-3}{2}$ Alors : $f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{2}$

Propriétés :

(1) f^{-1} est unique et bijective.

(2) $\forall x \in E$, $f^{-1} \circ f(x) = x$. (c.à.d $f^{-1} \circ f = I_E$, App identité dans E).

(3) $\forall y \in F$, $f \circ f^{-1}(y) = y$ (c.à.d $f \circ f^{-1} = I_F$, " " " F),

(4) Si $f: E \longrightarrow F$ et $g: F \longrightarrow G$ sont deux applications bijectives. Alors

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

13

II_2_4. Égalité de deux applications :

deux applications f et g sont égales si elles ont la même ensemble de départ E, et la même ensemble d'arrivé F, et si $\forall x \in E, f(x) = g(x)$

Exemple : Soit : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = (x-3)^2 - 9 \qquad x \longmapsto g(x) = x(x-6)$

Montrer que les applications f et g sont égales ? $\qquad f(x) \overset{?}{=} g(x)$

Réponse : On a f et g ont la même ensbl de depart et d'arrivé.

et On a $f(x) = (x-3)^2 - 9 \quad = x^2 - 6x + \cancel{9} - \cancel{9} = x(x-6) = g(x)$

Alors $f(x) = g(x)$

II_2_5. Restriction d'une application : (تضييق)

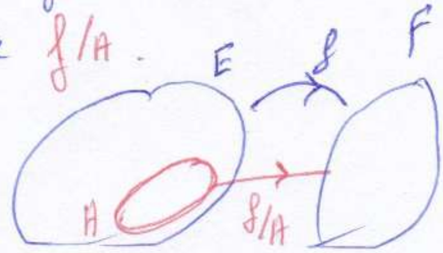
Soient E et F deux ensembles, et A un sous ensemble de E ($A \subset E$);

et soit l'application $f : E \longrightarrow F$.

On peut définir l'application : $g : A \longrightarrow F$ telle que :

$\forall x \in A, f(x) = g(x)$. Alors :

on dit que g est une restriction de f à A, on la note f/A.



Exemple : Soient :

$f :]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$

$x \longmapsto f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

et $g : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$

$x \longmapsto \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$

Montrer que $g(x)$ est une application restriction de f.

On remarque que $[1, +\infty[\subset]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Il reste de montrer que $f(x) \overset{?}{=} g(x)$.

On a $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{(x-1)(x+1)} = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} = g(x)$.

Donc f et g ne sont pas égales car $D_f \neq D_g$

Mais g est une restriction de f sur $[1, +\infty[$

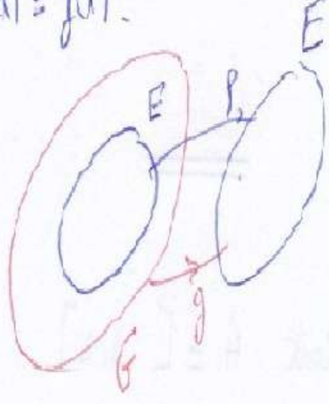
(Nous avons restreint l'ensbl de départ)

II.2.6. Prolongement d'une application. (u x ô)

Soit $f : E \longrightarrow F$, et soit G un ensemble tq $E \subset G$.

l'application $g : G \longrightarrow F$ telle que : $\forall x \in E$, $f(x) = g(x)$.

On dit que g est un prolongement de f à G.



Exemple : Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

et Soit $g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

Réponse :

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On remarque que. $]0, +\infty[\subset [0, +\infty[$;

et on a $\forall x \in]0, +\infty[$, $g(x) = \frac{1}{x} = f(x)$

Donc g est un prolongement de f à $[0, +\infty[$. (Nous avons agrandis l'ensemble de départ)

20

Chapitre N° 02 : Les nombres Complexes.

Introduction : * Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, il n'existe pas de nombre réel x tel que : $x^2+\alpha=0$ ie. ($x^2=-\alpha$.), càd pas de racines réelles.

* Le polynôme $P(x) = ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$ a deux racines $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ si le discriminant $\Delta = b^2-4a.c \geq 0$, et si $\Delta<0$ pas de solutions.

donc. Grâce aux nombres complexes on peut donner un sens mathématique aux racines carrées de nombres négatifs.

Ainsi : L'ensemble des nombres complexes est crée comme extension de l'ensemble des nombres réels. ($\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$)

II-1 ① Définition : Nombres Complexes.

Un nombre complexe est un couple de nombres réels (x,y)

On appelle **Ensemble des nombres complexes**, et on note $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux opérations suivantes. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\forall(x',y')\in\mathbb{R}^2$.

<u>Addition</u> : $(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$.

<u>Multiplication</u> : $(x,y)\times(x',y') = (x.x'-yy', xy'+x'y)$.

* Le nombre complexe $(x,0)$ sera simplement noté x.
* On note i le nombre complexe $(0,1)$, la formule de produit donne alors :

$i\times i = i^2 = (0,1)\times(0,1) = (-1,0) = -1$.

Ainsi i apparait comme une racine carré de -1, c'est pourquoi on écrit souvent $i=\sqrt{-1}$.

On peut alors noter de manière agréable $(x,y) = x+iy$.

on a. $(x+iy)\times(x'+iy') = xx'+ixy'+ix'y+i^2yy'$
$= xx'-yy'+i(x'y+xy')$.
$= xx'-yy'$

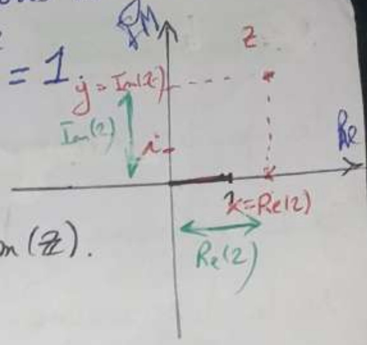
III-2-1 Forme algébrique :

On a $z \in \mathbb{C}$, $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$
$= (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$
$= x + iy$

- Tout nombre $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme algébrique : $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $i^2 = 1$

où x est la Partie réelle de z notée $Re(z)$.

et le réel y est la Partie imaginaire de z notée $Im(z)$.



* Si $y = 0$, alors $z \in \mathbb{R}$.
* Si $x = 0$ alors z est un imaginaire pur. (L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Exemples

1) $z = 3 + 5i$ est un nombre complexe dont la partie réelle est 3 et la partie imaginaire est 5.

2) $z = 2i$ est un imaginaire pur.

Propriétés : Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes, et $\lambda \in \mathbb{R}$

(1) Egalité : Deux nombres complexes z et z' sont égaux ssi $x = x'$ et $y = y'$ c.à.d. $x + iy = x' + iy' \Longleftrightarrow x = x'$ et $y = y'$

(2) Addition :

$$z + z' = (x \pm x') + i(y \pm y')$$

(3) Multiplication :

$$z \times z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

En effet si $x + iy = 0$ et si $y \neq 0 \Rightarrow i = -\frac{x}{y}$ Impossible car $i \in \mathbb{C}$

(4) $z = x + iy = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ et $y = 0$.
$z = x + iy \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq 0$ ou $y \neq 0$.

(5) Multiplication par un scalaire : $\lambda z = \lambda x + i(\lambda y)$.

(6) Tout nombre complexe a un OPPOSÉ : $z = x + iy \Rightarrow -z = -x - iy$; i.e. $-z = (-x, -y)$ est l'opposé de $z = (x, y)$

(7) Si $z = x + iy \neq 0$, il existe un unique $z^{-1} \in \mathbb{C}$ appelé Inverse de z tel que

$$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1 \quad \text{avec } 1 = (1, 0) = 1 + i(0). \quad \left(z^{-1} = \frac{1}{z}\right)$$

On a $z \neq 0$, $(x, y) \neq (0, 0)$, alors

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x - iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2} + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)}$$

est la Forme algébrique de l'inverse.

Ainsi : si $z=(x,y)\neq 0$ alors $\exists!\, z^{-1}\in\mathbb{C}$ tel que $z^{-1}=\frac{1}{z}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

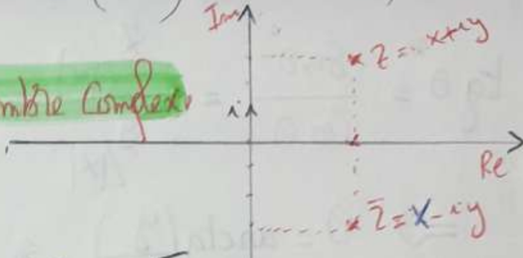
(8) Si $z.z'=0$ alors $z=0$ ou $z'=0$.

(9) Puissance : On a $z^2=z.z$ et $z^n=\underbrace{z.z\ldots z}_{n\text{ fois}, n\in\mathbb{N}}$; $z^0=1$ et $z^{-n}=\left(\frac{1}{z}\right)^n=\frac{1}{z^n}$.

Théorème : Les lois d'addition et de multiplication des nombres complexes vérifient les propriétés suivantes : Soient $z, z', z''\in\mathbb{C}$.

1. La Commutativité : $z+z'=z'+z$ et $zz'=z'z$.
2. L'Associativité : $(z+z')+z''=z+(z'+z'')=z+z+z'$ et $(z.z').z''=z(z'z'')=zz'z''$.
3. La Distributivité : $z(z'+z'')=zz'+zz''$.

III-3 Conjugué, Module d'un nombre complexe



III-3.1 Conjugué d'un complexe :

Soit $z=x+iy\in\mathbb{C}$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

On appelle Conjugué de z et on note $\bar{z}$ le complexe $\bar{z}=x-iy$.

Par exemple : le conjugué de $z=1+4i$ est $\bar{z}=1-4i$

$z=2-i$ est $\bar{z}=2+i$.

Propriétés : Soient z et z' deux nombres complexes. On a alors :

(1) $\bar{\bar{z}}=z$ (2) $\begin{cases}\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}\\ \overline{z-z'}=\bar{z}-\bar{z'}\end{cases}$ (3) $\overline{z.z'}=\bar{z}.\bar{z'}$

(4) $\begin{cases} z=\bar{z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R} \\ \bar{z}=-z \Leftrightarrow z \text{ imaginaire pur}\end{cases}$ (5) $z+\bar{z}=2\,Re(z)$

(6) $z-\bar{z}=2i\,Im(z)$ (7) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ avec $z'\neq 0$

(8) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$ et $\overline{z^n}=(\bar{z})^n, n\in\mathbb{Z}$ (9) $\forall k\in\mathbb{R}, \overline{kz}=k.\bar{z}$.

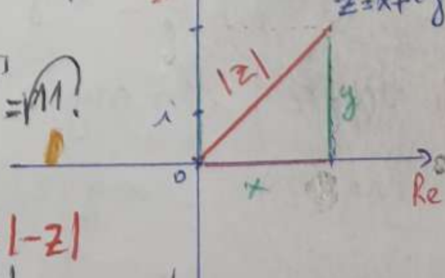
Preuve.
$z=x+iy$
$z'=x'+iy'$
$\overline{z+z'}=\overline{x+iy+x'+iy'}$
$=\overline{(x+x')+i(y+y')}$
$=x+x'-iy-iy'$
$=x-iy+x'-iy'$
$=\bar{z}+\bar{z'}$

III-3.2 Module d'un complexe

Le module de $z=x+iy$ est le réel positif $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}}$.

En effet $z\times\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-i^2y^2=x^2+y^2$.

Exemple : Le module de $z=3+\sqrt{2}\,i$ est $|z|=\sqrt{3^2+\sqrt{2}^2}=\sqrt{11}$.



Propriétés : Soient z et z' deux nombres complexes.

(1) $|z|\geq 0$; (2) $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$. (3) $|z|=|\bar{z}|=|-z|$

(4) $|z|^2=z.\bar{z}$ (5) $|z.z'|=|z|.|z'|$ (6) $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ (7) $|z^n|=|z|^n, \forall n\in\mathbb{N}$

(8) $|z+z'|\leq|z|+|z'|$; (9) $\big||z|-|z'|\big|\leq|z-z'|\leq|z|+|z'|$ $z\in\mathbb{C}$ et $z'\in\mathbb{C}^*$

(10) $|Re(z)|\leq|z|$ et $|Im(z)|\leq|z|$