Exo1

i. Montrons $(P \Rightarrow q \text{ et } q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

P	q	R	$P \Rightarrow q$	$q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

① $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \; x+y > 0$. fausse

$\overline{①}$: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \; x+y \leq 0$.

② $\exists x \in \mathbb{R}, \; x^2 - x < 0$.

On a. $x^2 - x = x(x-1)$

On a donc

	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où l'assertion est Vraie

Sa négation est donc $\forall x \in \mathbb{R}, \; x^2 - x \geq 0$.

③ $\exists x \in \mathbb{R} \; x^2 \geq 0 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}, \; x^2 + 2 = 0$. Fausse

Sa négation est $\quad P \Rightarrow q \iff P \wedge \overline{q}$

$\exists x \in \mathbb{R}, \; x^2 \leq 0 \quad$ et $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \; x^2 + 2 \neq 0$

④ $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \; z - xy = 0$ Vraie

car on peut choisir $x = \frac{z}{y}$

Exo2 I : soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = x^2$

① Calculons l'image direct de A tq $A = [-2, 2]$

on a $f([-2,2]) = \{ f(x),\ x \in [-2,2] \}$

on a donc $x \in [-2,2] \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

on distingue deux cas

$-2 \leq x \leq 0$ ou $0 \leq x \leq 2$

$4 \geq x^2 \geq 0$ ou $0 \leq x^2 \leq 4$

$0 \leq x^2 \leq 4$

$f(x) \in [0,4]$

f est injective $\Leftrightarrow$
$\forall x, x' \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

on a $f(x) = f(x')$
$\Leftrightarrow x^2 = x'^2$
$\Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{x'^2}$
$\Rightarrow |x| = |x'|$
$\Rightarrow x = \begin{cases} -x' \\ x' \end{cases}$

D'où f n'est pas injective.

② Calculons l'image réciproque de $B = [1,4]$.

$f^{-1}([1,4]) = \{ x \in \mathbb{R},\ f(x) \in [1,4] \}$

on a $f(x) \in [1,4] \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 4$

$\Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{x^2} \leq 2$

$\Leftrightarrow 1 \leq |x| \leq 2$

$\Leftrightarrow 1 \leq -x \leq 2$ ou $1 \leq x \leq 2$

$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq -1$ ou $1 \leq x \leq 2$

$\Rightarrow x \in [-2,-1]$ ou $x \in [1,2]$

$\Rightarrow x \in [-2,-1] \cup [1,2]$.

Exo2 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $xRy = x^3 - y^3 = \lambda(x^2 - y^2)$

II- Montrons que R est une relation d'équivalence :

* R est une relation d'équivalence ssi : $\begin{cases} R \text{ est Reflexive,} \\ R \text{ est Symétrique} \\ R \text{ est transitive} \end{cases}$

a) R est Reflexive si $\forall x \in \mathbb{R}$, xRx

On a. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\underbrace{x^3 - x^3}_{0} = \underbrace{\lambda(x^2 - x^2)}_{0}$ D'où xRx Ainsi R est Reflexive

b) R est symétrique si : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $xRy \Rightarrow yRx$

on a $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x^3 - y^3 = \lambda(x^2 - y^2)$

$\Leftrightarrow -(-x^3 + y^3) = -\lambda(-x^2 + y^2)$

$\Leftrightarrow -(y^3 - x^3) = -\lambda(y^2 - x^2)$

$\Leftrightarrow y^3 - x^3 = \lambda(y^2 - x^2) \Leftrightarrow yRx$

D'où R est symétrique.

c) R est transitive si $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, xRy et $yRz \Rightarrow xRz$.

On a $xRy \Leftrightarrow x^3 - y^3 = \lambda(x^2 - y^2)$ ... ①

et $yRz \Leftrightarrow y^3 - z^3 = \lambda(y^2 - z^2)$ ... ②

on a. ① + ② $= x^3 - \cancel{y^3} + \cancel{y^3} - z^3 = \lambda(x^2 - \cancel{y^2}) + \lambda(\cancel{y^2} - z^2)$

$= x^3 - z^3 = \lambda(x^2 - z^2) \Rightarrow yRz$

D'où R est transitive.

Alors on a R est Reflexive, Symétrique et transitive, d'où elle est d'équivalence

2- pour $\lambda = 2$, on a donc. $xRy \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 2(x^2 - y^2)$

* Déterminons la classe d'équivalence de 0.

on a $\mathring{0} = \{x \in \mathbb{R},\ xR0\}$

$= \{x \in \mathbb{R},\ x^3 - 0^3 = 2(x^2 - 0^2)\} = \{x \in \mathbb{R}\ x^3 - 2x^2 = 0\} = \{x \in \mathbb{R}\ x^2(x-2) = 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R}\ x = 0 \vee x = 2\}$ Ainsi $\mathring{0} = \{0, 2\}$

Exo3 Soit. $Z_1 = (3-2i)(1-3i)$; $Z_2 = \frac{1-i}{1+i}$

* $Z_1 = 3 - 9i - 2i + 6i^2 = 3 - 11i - 6 = -3 - 11i$

* $Z_2 = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{1-i^2} = \frac{1^2 + i^2 - 2i}{1+1} = \frac{1-1-2i}{2} = -i$

* $Z_1 . Z_2 = (-3-11i).(-i) = 3i + 11i^2 = -11 + 3i$

* $\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{-i}{-3-11i} = \frac{i}{3+11i} = \frac{i(3-11i)}{(3+11i)(3-11i)} = \frac{3i - 11i^2}{3^2 - (11i)^2}$

$= \frac{11+3i}{9+121} = \frac{11+3i}{130} = \frac{11}{130} + \frac{3}{130} i$

* $Z_3 = (3,-1) = 3 - i$

Le Congigu de Z_1 est $-3 + 11i$

Le Conjugé de Z_2 est i

Le Conjugé de $\frac{Z_2}{Z_1}$ est $\frac{11}{130} - \frac{3}{130} i$

Le conjugue de Z_3 est $3 + i$

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE BATNA 2 FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE SCIENCE TECHNOLOGIQUE

Première année Socle Commun Ingénieur

Travail à domicile :Matière Algèbre1 **Date : 18/12/2023**

Nom et prénom	Groupe	N° Carte d'étudiants

***Réponse vrai avec un remplissage vert ☐ ; ou bien cocher la bonne réponse**

QCM :

1- Quelles sont les assertions (propositions) vraies ?

0,25 ☒ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x + y)0$

0,25 ☒ $\forall x \in IR,\ |x^2 - x| \geq 0$

0,25 ☒ $\forall n \in IN\backslash\{0,1\},\ n^2 - 3 \geq 0$

2- Négation des propositions

0,25 ☐ *la négation de* $[p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow (p \wedge q)$ *est* $[p \wedge (q \vee r)] \wedge (p \vee q)$

0,25 ☐ *la négation de* $\forall x \geq 0, \exists y \in \mathbb{Q}, 0 \leq y \leq x$ *est* $\exists x < 0, \forall y \notin \mathbb{Q}, 0 > y > x$

3- Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$; $A = \{1,2\}$; et $B = \{2,4\}$.

0,25 $A \cap C_E(B) =$ ☒ $\{1\}$; ☐ $\{1,2\}$; ☐ $\{1,3\}$

0,25 $C_E(A) \cup C_E(B) =$ ☒ $\{1,3,4\}$; ☐ $\{1,2,3\}$; ☒ $\{1,3,4\}$

4- Soient $E =]-\infty,+\infty[$; $A =]-\infty; 2]$; $B = [3;+\infty[$.

0,25 $C_E(A) \cap C_E(B) =$ ☒ $]2,3[$; ☐ $]-\infty; 3]$; ☐ $]3;+\infty[$; ☐ $[2,3]$

0,25 $E \cap C_E(B) =$ ☐ $]-\infty; 3]$; ☒ $]-\infty; 3[$; ☐ $]3;+\infty[$; ☐ $[3;+\infty[$

0,25 $E \cup C_E(B) =$ ☐ $]-\infty; 3]$; ☒ $]-\infty; +\infty[$; ☐ $]3;+\infty[$ ☐ $[-3;3[$

5- Soit $A = \{x \in IR : (x + 8)^2 = 9^2\}$ Sous quelle forme peut-on encore écrire l'ensemble A?

0,25 ☐ $A = \{1\}$ ☐ $A = \emptyset$ ☐ $A = \{-17\}$ ☒ $A = \{1, -17\}$

6- Soit $E = \{a, b, c\}$. Peut-on écrire:

☒ $a \in E$ ☐ $a \subset E$ ☒ $\{a\} \subset E$ ☐ $\emptyset \in E$

0,25 0,25

7- On considère l'application f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(n) = n + 2$

☐ f est surjective et non injective. ☐ f est injective et non surjective.

0,25 ☒ f est bijective. ☐ f n'est ni injective ni surjective.

8- Soit f:$\mathbb{R}\to[-1,1]$ définie par: $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, f est-elle :

0,25 ☐ Injective ? ☒ Surjective ? ☐ Bijective ?

9- E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. Soient A, B deux sous-ensembles de E.

0,25 ☐ $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

0,25 ☒ $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

10- Dans $\mathbb{R}^*$ on définit la relation $\mathfrak{R}$ par : $\forall x,y \in \mathbb{R}^*$, $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$

0,25 a) La classe d'équivalence de 2 est : ☒ $\{\frac{1}{2}, 2\}$; ☐ $\{-2, \frac{1}{2}\}$; ☐ $\{2\}$

0,25 b) La classe d'équivalence de 1 est : ☐ $\{0,1\}$; ☒ $\{1\}$; ☐ $\{1,-1\}$

11- Une relation d'ordre partielle est telle que :

☐ $\forall (x,y) \in E^2, xRy \land yRx$

☐ $\forall (x,y) \in E^2, xRy \lor yRx$

0,25 ☒ $\exists (x,y) \in E^2, x\cancel{R}y \land y\cancel{R}x$

12- Sur l'ensemble $\mathbb{R}$, On définit la relation binaire par : $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{N}$

0,5 ☒ $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre ? ☐ C'est oui, l'ordre est total ou partiel ?

13- Tout nombre complexe **z** s'écrit de manière unique sous la forme algébrique : $z=x+iy$ avec $x,y \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$

0,25 a- L'opposé de nombre complexe **z** est : ☐ x-iy ; ☐ -x+iy ; ☒ -x-iy

0,25 b- Le conjugue de nombre complexe **z** est : ☒ x-iy ; ☐ -x+iy ; ☐ -x-iy