

## TD 1 P1 (F211) Rappels Mathématiques

### EXERCICE 1 :

$$\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}; \vec{B} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \text{ et } \vec{C} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

1. Le module :

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{17}$$

$$\|\vec{C}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

2. Les composantes et les modules des vecteurs :

$$\vec{V} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \quad \text{et} \quad \vec{W} = \vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$$

$$\vec{V} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (2 + 3 + 4)\vec{i} + (3 - 2 - 3)\vec{j} + (-1 + 2 + 3)\vec{k}$$

$$\vec{V} = 9\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{V}\| = \sqrt{9^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{101}$$

$$\vec{W} = \vec{A} + \vec{B} - \vec{C} = (2 + 3 - 4)\vec{i} + (3 - 2 + 3)\vec{j} + (-1 + 2 - 3)\vec{k}$$

$$\vec{W} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{W}\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$$

3. Le vecteur unitaire  $\vec{u}$  porté par le vecteur :

$$\vec{F} = \vec{A} + 2\vec{B}$$

$$\vec{F} = \|\vec{F}\|\vec{u}_A \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_A = \frac{\vec{F}}{\|\vec{F}\|}$$

$$\vec{F} = (2 + 6)\vec{i} + (3 - 4)\vec{j} + (-1 + 4)\vec{k} = 8\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\Rightarrow \|\vec{F}\| = \sqrt{8^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{74}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_A = \frac{8}{\sqrt{74}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{74}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{74}}\vec{k}$$

4. Les produits scalaire et vectoriel des vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  :

- Le produit scalaire :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = xx' + yy' + zz' = 6 - 6 - 2 \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = -2$$

- Le produit vectoriel :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = (yz' - zy')\vec{i} - (xz' - x'z)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (3(2) - (-1)(-2))\vec{i} - (2(2) - 3(-1))\vec{j} + (2(-2) - 3(3))\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = 4\vec{i} - 7\vec{j} - 13\vec{k}$$

5. L'angle  $(\widehat{\vec{A}, \vec{B}})$  :

Le produit scalaire :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos(\widehat{\vec{A}, \vec{B}}) \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{A}, \vec{B}}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|} = \frac{-2}{\sqrt{14}\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow (\widehat{\vec{A}, \vec{B}}) = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{14}\sqrt{17}}\right) = 97.45^\circ$$

**EXERCICE 2 :**

$$M_1 (1,1,1) ; M_2(2,2,1) ; M_3 (2,1,0)$$

a) Trouver l'angle formé par les vecteurs  $\overrightarrow{M_2M_1}$  et  $\overrightarrow{M_2M_3}$

$$\overrightarrow{M_2M_1} \cdot \overrightarrow{M_2M_3} = \|\overrightarrow{M_2M_1}\| \cdot \|\overrightarrow{M_2M_3}\| \cdot \cos \alpha \text{ tel que } \alpha = (\widehat{\overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{M_2M_3}})$$

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{M_2M_1} \cdot \overrightarrow{M_2M_3}}{\|\overrightarrow{M_2M_1}\| \cdot \|\overrightarrow{M_2M_3}\|}$$

$\overrightarrow{M_2M_1} = ??$

$$\overrightarrow{M_2M_1} = (1 - 2)\vec{i} + (1 - 2)\vec{j} + (1 - 1)\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{M_2M_1} = -\vec{i} - \vec{j} \text{ et } \|\overrightarrow{M_2M_1}\| = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{M_2M_3} = (2 - 2)\vec{i} + (1 - 2)\vec{j} + (0 - 1)\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{M_2M_3} = -\vec{j} - \vec{k} \text{ et } \|\overrightarrow{M_2M_3}\| = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{M_2M_1} \cdot \overrightarrow{M_2M_3} = (-\vec{i} - \vec{j}) \cdot (-\vec{j} - \vec{k}) = +1$$

Alors :

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

b/ évaluer les vecteurs suivants :  $\vec{i} \wedge \vec{j}$  ;  $\vec{j} \wedge \vec{k}$  ;  $\vec{k} \wedge \vec{j}$  ;  $\vec{k} \wedge \vec{i}$  ;  $\vec{j} \wedge \vec{j}$  ;  $\vec{k} \wedge \vec{k}$  ;  $\vec{j} \wedge \vec{k}$

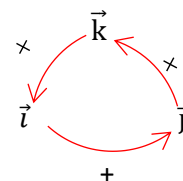
$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{j} = \|\vec{j}\| \cdot \|\vec{j}\| \cdot \sin(\widehat{(\vec{j}, \vec{j})}) = 1.1. \underbrace{\sin 0}_{=0} = 0$$



$$\vec{k} \wedge \vec{k} = \|\vec{k}\| \cdot \|\vec{k}\| \cdot \sin(\widehat{\vec{k}, \vec{k}}) = 1 \cdot 1 \cdot \underbrace{\sin 0}_{=0} = 0$$

$$\vec{j} \wedge 4\vec{k} = (1 \cdot 4)(\vec{j} \wedge \vec{k}) = 4\vec{i}$$

**EXERCICE 4 :** A(2, 1), B(1, 1) et C(1, 2)

1) Les coordonnées polaires (r, θ) de ces trois points :

En coordonnées polaires :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$A \begin{cases} r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ \theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26.56^\circ \end{cases} \Rightarrow A(\sqrt{5}, 26.56^\circ)$$

$$B \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ \end{cases} \Rightarrow B(\sqrt{2}, 45^\circ)$$

$$C \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \\ \theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = 63.43^\circ \end{cases} \Rightarrow C(\sqrt{5}, 63.43^\circ)$$

2) Exprimer les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BC}$

- En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = (1 - 2)\vec{i} + (1 - 1)\vec{j} = -\vec{i}$$

$$\overrightarrow{AC} = (1 - 2)\vec{i} + (2 - 1)\vec{j} = -\vec{i} + \vec{j}$$

$$\overrightarrow{BC} = (1 - 1)\vec{i} + (2 - 1)\vec{j} = \vec{j}$$

- En coordonnées polaires.

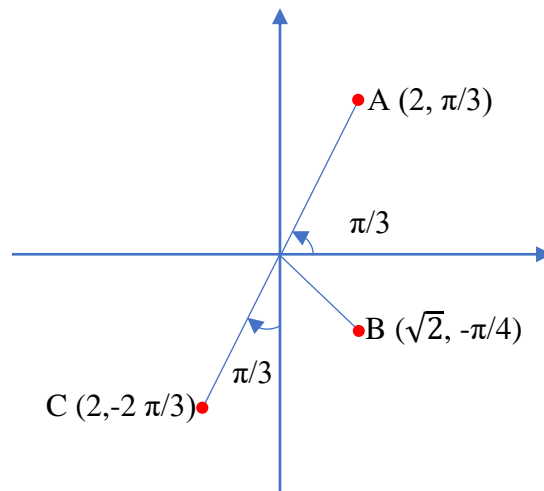
$$\overrightarrow{AB} \left( \begin{matrix} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \end{matrix} \right) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \left( \begin{matrix} r = 1 \\ \theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{0}{-1}\right) = 180^\circ = \pi \text{ rad} \end{matrix} \right)$$

$$\overrightarrow{AC} \left( \begin{matrix} r = \sqrt{2} \\ \theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = 135^\circ = \frac{3\pi}{4} \text{ rad} \end{matrix} \right)$$

$$\vec{BC} \left( \theta = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{1}{0} \right) = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \operatorname{rad} \right)$$

**EXERCICE 5 :**

- Représenter des points polaires suivants : A (2, π/3) ; B (√2, -π/4) ; C (2, -2π/3).



- Les coordonnées cartésiennes

Coordonnées polaires	Coordonnées cartésiennes
A (2, π/3)	$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1 \\ y = 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow A (1, \sqrt{3})$
B (√2, -π/4)	$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ y = \sqrt{2} \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow B (1, -1)$
C (2, -2π/3)	$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \cos \left(-2\frac{\pi}{3}\right) = -1 \\ y = 2 \sin \left(-2\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow A (-1, -\sqrt{3})$

**EXERCICE 6 : (Voir cours)****EXERCICE 7 :**

$A(1,0,0)$  ,  $B(\sqrt{2}/4, \sqrt{6}/4, \sqrt{2}/2)$ .

Les coordonnées sphériques sont données par :

Pour A/

$$x = OH \cos \varphi \quad x = r \sin \theta \cos \varphi \quad \text{avec } OH = r \sin \theta$$

$$y = OH \sin \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta \quad z = r \cos \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \quad \text{tg } \theta = \frac{y}{x} \text{ d'où } \theta = 0^\circ \quad \text{et} \quad \cos \varphi = \frac{z}{r} \text{ d'où } \varphi = 90^\circ$$

Pour B /

$$r = 1, \quad \theta = 60^\circ \quad \varphi = 45^\circ$$