Corrigé TD3 P1 Ingénieurs 2022/2023

Exercice 1

Voiture $(\boldsymbol{C})$ **:** roule à la vitesse $v = v_0 = cte$ → MRU

$$v = v_0 = 90\ km.h^{-1} = \frac{90.10^{+3}}{3600} = 25\ m.s^{-1}$$

$$\begin{cases} a_C = 0\ m.s^{-2} \\ v_C = v_{C_0} = cte \\ x_C = v_{C_0}t + \underbrace{x_{C_0}}_{=0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_C = 0\ m.s^{-2} \\ v_C = 25\ m.s^{-1} \\ x_C = 25t \end{cases}$$

Motard $(\boldsymbol{M})$ **:** accélère uniformément → MRUV

$$\begin{cases} a_M = cte > 0 \\ v_M = a_M t + v_{M_0} \\ x_M = \dfrac{1}{2} a_M t^2 + v_{M_0} t + x_{M_0} \end{cases}$$

Point de départ : à $t = 0s$: $\begin{cases} x_{M_0} = 0\ m \\ v_{M_0} = 0\ m.s^{-1} \end{cases}$

$a_M = ?$

$$a_M = \frac{v_M - v_{M_0}}{\Delta t} = \frac{25 - 0}{10} = 2{,}5\ m.s^{-2}$$

Donc : $\begin{cases} a_M = 2{,}5\ m.s^{-2} \\ v_M = 2{,}5t \\ x_M = \frac{2{,}5}{2} t^2 \end{cases}$

1/ $\boldsymbol{t} = ?$

Le motard rattrape la voiture lorsque $x_M = x_C$

$$x_M = x_C \Rightarrow \frac{2{,}5}{2} t^2 = 25t$$

$$\Rightarrow t = \frac{2.25}{2{,}5}$$

$\Rightarrow t = 20\ s$

2/ $\boldsymbol{d}$ =?

$d = x_C(t = 20s) = x_M(t = 20s) = 500\ m$

3/ $\boldsymbol{v}$ =?

$v = v_M(t = 20s) = 2{,}5.20 \Rightarrow v = 50\ m.s^{-1} = 180\ km.h^{-1}$

Corrigé TD3 P1 Ingénieurs 2022/2023

Exercice 2

$\Delta t = 10\ s$	$\Delta t = 1\ mn = 60\ s$	$\Delta t = 2\ s$	$\Delta t = ? = 4{,}34\ s$
Le conducteur accélère avec $a_1 = 1{,}3\ m/s^2$ → MRUV $\begin{cases} a_1 = cte > 0 \\ v = a_1 t + v_0 \\ x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 + v_0 t + x_0 \end{cases}$ à $t = 0s$ $\begin{cases} x_0 = 0\ m \\ v_0 = 0\ m/s \end{cases}$(point de départ) $\begin{cases} a_1 = 1{,}3\ m/s^2 \\ v = 1{,}3t \\ x_1 = \frac{1{,}3}{2} t^2 \end{cases}$ Jusqu'à atteindre une vitesse de déplacement $v_d = cte$. $v_d = v(10s) = 1{,}3.10 = 13\ m/s$	Le conducteur se déplace avec la vitesse $v_d = cte$ → MRU $\begin{cases} \text{a} = 0\ m/s^2 \\ v = cte = v_d \\ x_2 = v_d t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \text{a} = 0\ m/s^2 \\ v = 13\ m/s \\ x_2 = 13t \end{cases}$ Jusqu'à ce que le conducteur aperçoive l'obstacle devant lui.	Le conducteur prend un temps de réaction pour décélérer → il garde alors le même mouvement d'avant → MRU $\begin{cases} \text{a} = 0\ m/s^2 \\ v = 13\ m/s \\ x_2 = 13t \end{cases}$	Le conducteur décélère pour pouvoir s'arrêter avant de heurter l'obstacle avec $a_2 = -3\ m/s^2$ → MRUV $\begin{cases} a_2 = cte < 0 \\ v = a_2 t + v_d \\ x_3 = \frac{1}{2} a_2 t^2 + v_d t \end{cases}$ $\Longrightarrow \begin{cases} a_2 = -3\ m/s^2 \\ v = -3t + 13 \\ x_3 = -\frac{3}{2} t^2 + 13t \end{cases}$ $\Delta \boldsymbol{t} = ?$ Δt correspond au temps d'arrêt →$v = o$ $v = 0 \Longrightarrow -3t + 13 = 0$ $\Longrightarrow t = \Delta t = 4{,}34\ s$

50m

d_1 d_2

Obstacle

1/ Distance parcourue au moment où le conducteur aperçoit l'obstacle (d_1 =?)

$d_1 = x_1(10\ s) + x_2(60\ s)$

$$\begin{cases} x_1(10\ s) = \frac{1{,}3}{2}(10)^2 = 65\ m \\ x_2(60\ s) = 13.60 = 780\ m \end{cases} \Longrightarrow d_1 = 65 + 780 \Longrightarrow d_1 = 845\ m$$

2/ Est-ce que le conducteur peut s'arrêter avant de heurter l'obstacle ?

Si la distance parcourue après avoir aperçu l'obstacle (d_2) est < 50 m → le conducteur peut s'arrêter. Sinon ($d_2 \geq 50\ m$) → il le heurtera.

$d_2 = x_2(2\ s) + x_3(4{,}34\ s)$

$\begin{cases} x_2(2\ s) = 13.2 = 26\ m \\ x_3(4{,}34\ s) = -\frac{3}{2}(4{,}34)^2 + 13.4{,}34 = 28{,}17\ m \end{cases} \Longrightarrow d_2 = 26 + 28{,}17 = 54{,}17\ m > 50\ m$ → Le tramway ne pourra pas s'arrêter avant de heurter l'obstacle situé à 50m sur les voies.

Corrigé TD3 P1 Ingénieurs 2022/2023

Exercice 3

à $t = 0s \begin{cases} x_0 = 0\ m \\ v_0 = 22\ km/h = \frac{22 .10^{+3}}{3600} = 6{,}11\ \ m/s \end{cases}$

1/ Donner la vitesse de Ali à t=2,5s. De quel mouvement s'agit-il ?

$a = 0{,}77\ \ m/s^2\ \Rightarrow MRUV$

$$\begin{cases} \mathrm{a} = cte > 0 \\ v = \mathrm{a}t + v_0 \\ x = \frac{1}{2}\mathrm{a}t^2 + v_0 t + x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0{,}77\ \ m/s^2 \\ v = 0{,}77\ t + 6{,}11 \\ \mathrm{x} = 0{,}38\ t^2 + 6{,}11t \end{cases}$$

Alors :

$v(2{,}5s) = 0{,}77\ (2{,}5) + 6{,}11 \quad \Rightarrow \boxed{v(2{,}5s) = 8{,}035\ \ m/s}$

Ou :

$v(2{,}5s) = 8{,}035\ .\ 10^{-3}\ .\ 3600 \quad \Rightarrow \boxed{v(2{,}5s) = 28{,}93\ \ km/h}$

2/ Distance parcourue (d =?)

$\mathrm{d} = \mathrm{x}(8s) = 0{,}38\ (8)^2 + 6{,}11(8) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{x} = 73{,}52\ m}$

3/ Calculer sa vitesse v dans le virage, ainsi que sa vitesse angulaire ω

$R = 230\ cm = 2{,}3\ m$

$t = 1{,}9\ s$ (MCU)

$$MCU \begin{cases} \overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e_r} \\ \vec{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \\ \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} \end{cases}$$

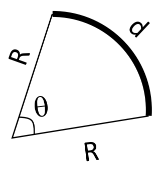
et aussi : $\begin{cases} \overrightarrow{e_t} = \overrightarrow{e_\theta} \\ \overrightarrow{e_n} = -\overrightarrow{e_r} \end{cases}$, d'où :

$$\begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} = 0\ \ m/s^2 = a_\theta \\ a_N = \dfrac{v^2}{R} = cte = -a_r \end{cases}$$

La trajectoire est un demi-cercle $\Rightarrow\ \omega = \frac{\pi}{t} = \frac{3{,}14}{1{,}9} \quad \Rightarrow \boxed{\omega = 1{,}655\ \ rad/s}$

$v = R\dot{\theta} = R\omega = 2{,}3\ .\ 1{,}655 \quad \Rightarrow \boxed{v = 3{,}801\ \ m/s}$

d=Rθ



Ou :

$v = \dfrac{d}{t}\ /\ d = \pi\ R \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{\pi\ R}{t} = \dfrac{3{,}14\ .\ 2{,}3}{1{,}9} \quad \Rightarrow \boxed{v = 3{,}801\ \ m/s}$

Corrigé TD3 P1 Ingénieurs 2022/2023

4/ donnez les expressions des vecteurs accélération auxquels est soumis Ali dans le virage

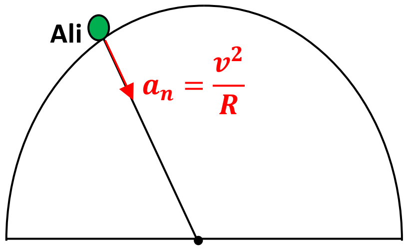
L'accélération tangentielle $a_t = \frac{dv}{dt}$ et puisque la vitesse est constante donc $a_t = 0$ (MCU)

L'accélération normale $a_n = \frac{v^2}{R}$ est constante en valeur et change en direction.

$$\vec{a}\begin{cases} a_T = a_\theta = \dfrac{dv}{dt} = 0\ m/s^2 \quad (MCU) \\ a_N = -a_r = 6{,}26\ m/s^2 \quad \begin{cases} a_N = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{(3{,}805)^2}{2{,}3} = 6{,}26\ m/s^2 \\ a_r = R\dot{\theta}^2 = 2{,}3(1{,}65)^2 = 6{,}26\ m/s^2 \end{cases} \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} \vec{a} = -6{,}26\ \vec{e_r} = 6{,}26\ \vec{e_n} \\ a = 6{,}26\ m/s^2 \end{cases}$$



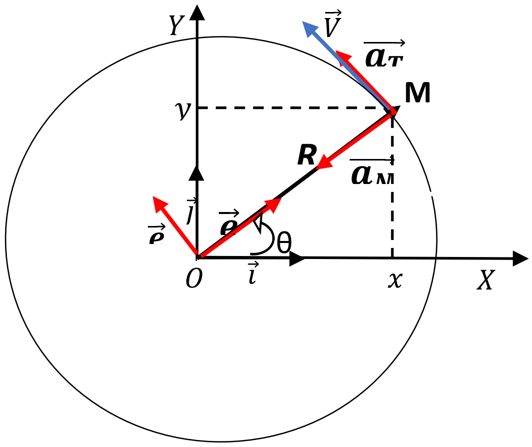
Exercice 4

1. L'expression de la vitesse et l'accélération dans la base polaire :

Mouvement circulaire : R= constante ; $\dot{\theta} = \omega = constante$

Nous obtenons donc : $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r \\ \vec{V}(t) = \frac{d}{dt}(R\vec{e}_r) = R\frac{d}{dt}\vec{e}_r = R\,\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \vec{a}(t) = -R\,\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r \end{cases}$

$$\vec{V}(t) = R\,\dot{\theta}\vec{e}_\theta \ \rightarrow \ V = R\omega \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}(t) = R\,\omega\vec{e}_\theta \\ \vec{a}(t) = -R\,\omega^2\,\vec{e}_r = a_N \end{cases}$$



Corrigé TD3 P1 Ingénieurs 2022/2023

2. Calcul de $\boldsymbol{\omega}$ en **rd/s** et **tr/mn :**

$$a = R\,\omega^2 = 6g \quad soit: \quad \omega = \sqrt{\frac{6g}{R}} = \sqrt{\frac{6*9.81}{5}} = \sqrt{11.77}\,\frac{rd}{s}$$

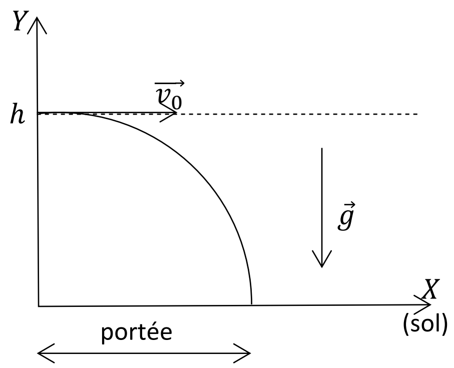
$$\omega = 3.43 rd/s$$

$$1\frac{tr}{mn} - - - - - - \rightarrow 2\pi\; rd/60s$$

$$X - - - - - - - \rightarrow 3.43\; rd/s$$

$$X = \frac{3.43*60}{2\pi} = 33\; tr/mn = X$$

Exercice 5



à $t = 0s$ $\begin{cases} x_0 = 0\; m \\ y_0 = h = 5000\; m \end{cases}$

$$v_0 = 1000\; km/h \;=\frac{10^{+3}.10^{+3}}{3600}\; m/s \;= 277{,}78\; m/s$$

1/ Equation de la trajectoire du colis

Les équations de mouvement du colis :

(OX): l'avion volant à l'horizontal à la vitesse $v_0 = cte$ → MRU

$$\begin{cases} a_x = 0\; m/s^2 \\ v_x = cte = v_0 \\ x = v_0 t + x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0\; m/s^2 \\ v_x = 277{,}78\; m/s \\ x = 277{,}78t \end{cases}$$

(OX): Le mouvement du colis est le même mouvement que celui de l'avion → MRU

$$\begin{cases} a_x = 0\; m/s^2 \\ v_x = 277{,}78\; m/s \\ x = 277{,}78t \end{cases}$$

(OY): Mouvement du colis est le mouvement d'un projectile →MRUV

$$\begin{cases} a_y = cte \;\; = -g \\ v_y = a_y t + v_{y_0} \\ y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{y_0} t + y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_y = -10\; m/s^2 \\ v_y = -10t \\ y = -5t^2 + 5000 \end{cases}$$

Donc:

$$\begin{cases} x = 277{,}78t \quad \rightarrow (1) \\ y = -5t^2 + 5000 \rightarrow (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow t = \frac{x}{277{,}78}$$

Corrigé TD3 P1 Ingénieurs 2022/2023

$(2) \Rightarrow \mathrm{y} = -5\left(\frac{x}{277{,}78}\right)^2 + 5000$

$\Rightarrow \mathrm{y} = -\frac{5}{(277{,}78)^2}x^2 + 5000$

De la forme : $\mathrm{y} = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}$

C'est l'équation d'une parabole.

2/ $t_p = t_{portée}$ =?

Le colis atteint le sol $\Rightarrow y = 0$

$y = 0 \Rightarrow -5t^2 + 5000 = 0$
$\Rightarrow t = 31{,}62\ s$

En fait :

$t = t_p - \underbrace{t_0}_{=0s} \Rightarrow t_p = t = 31{,}62\ s$

3/ La distance parcourue par l'avion

La distance parcourue par l'avion pendant ce temps (t_p) est égale à la portée (x_p) (car l'avion et le colis ont le même mouvement suivant OX), d'où :

$d = x_p = x(t = t_p) = 277{,}78\,.\,31{,}62 \Rightarrow \mathrm{d} = 8783{,}40\ m$

Exercice 6 :

Il faut utiliser la formule de composition des vitesses, on définit donc les deux référentiels :

R : $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ le référentiel lié à la rive : Voir figure.

R' : le référentiel lié à un observateur fixe par rapport au courant : $(\mathrm{E}, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

E est un point de la rivière qui possède la vitesse $\overrightarrow{W}$ par rapport à la rive.

La vitesse du bateau par rapport au courant est $\vec{V}$ et La vitesse du courant est $\overrightarrow{W}$ par rapport à la rive.

$$\vec{V}(\mathrm{M})|R = \vec{V}(\mathrm{M})|R' + \vec{V}\ (\mathrm{M}\varepsilon\mathrm{R'})|R$$

Cette formule peut s'écrire : $\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_e} + \overrightarrow{V_r}$

La vitesse absolue est composée de la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{V_e}$ et de la vitesse relative $\overrightarrow{V_r}$ tel que :

La vitesse d'entrainement $\overrightarrow{V_e}$ est la vitesse du repère R' par rapport au repère fixe R.

La vitesse relative $\overrightarrow{V_r}$ est la vitesse de M(bateau) par rapport au repère mobile R'.

$\overrightarrow{V_r}$ = vitesse relative du bateau par rapport à R'.

$\overrightarrow{V_r} = \vec{V}(\mathrm{M})|R'$c

$\overrightarrow{V_e} =$ vitesse du point M considéré comme lié au courant par rapport à la rive.

Corrigé TD3 P1 Ingénieurs 2022/2023

$\vec{V_e} = \vec{V}$ (MεR')$|R = \vec{V}$(E)$|R + \vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge \overrightarrow{EM} = \vec{W} + \vec{0} = w\,\vec{e_x}$ (il n'y a pas de rotation de R' par rapport à R).

Donc : $\vec{V_a} = \vec{V}$ (M)$|R = \vec{V} + w\,\vec{e_x}$ (1)

Si on appelle xet y les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans R :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{j}$ et $\vec{V}(M) = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y}$ (2)

En identifiant (1) et (2) on a : $\vec{V} + w\,\vec{e_x} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y}$

Or $\vec{Vc} = V\cos\Theta\,\vec{e_y} - V\sin\Theta\,\vec{e_x}$ Donc : $V\cos\Theta\,\vec{e_y} - V\sin\Theta\,\vec{e_x} + w\,\vec{e_x} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y}$

$-V\sin\Theta + w = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$ (3) et $V\cos\Theta = \dot{y} = \frac{dy}{dt}$ (4)

Le vecteur position s'obtient en intégrant les équations différentielles (3) et (4). Sachant que V et Θ et w sont des constantes.

$x = (w - V\sin\Theta)t + cte_1$ *or à* $t=0$ $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$ *donc* $x = 0$ *et* $cte_1 = 0$

De même $y = (V\cos\Theta)t + cte_2$ *or à* $t=0$ $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$ *donc* $y = 0$ *et* $cte_2 = 0$

$x = (w - V\sin\Theta)t$

$y = (V\cos\Theta)t$

Pour obtenir l'équation de la trajectoire, il suffit d'éliminer le temps entre les équations précédentes :

$$y = \frac{V\cos\Theta}{w - V\sin\Theta}\,x$$ C'est une droite.

b/soit A le point d'arrivée du bateau sur la rive opposée ; on a :

$$y_A = \frac{V\cos\Theta}{w - V\sin\Theta}\,x_A$$

Sachant que $y_A = l$, la distance parcourue D pendant la traversée est la distance OA.

D= OA $= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{(w - V\sin\Theta)^2}{(V\cos\Theta)^2}\,l^2 + l^2}$ *d'où* $D = l\sqrt{\frac{(w - V\sin\Theta)^2}{(V\cos\Theta)^2} + 1}$

On veut déterminer l'angle Θ_m qui minimise D :

D = (largeur de la rivière)= $l = l\sqrt{\frac{(w - V\sin\Theta)^2}{(V\cos\Theta)^2} + 1}$ soit $\frac{w - V\sin\Theta}{V\cos\Theta} = 0$ donc $\sin\Theta_m = \frac{w}{v}$