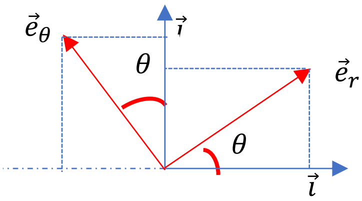
Corrigé TD 2 P1 ingénieur (Cinématique du point matériel)

Exercice 1/

$$\begin{cases} r(t) = e^t \\ \theta(t) = t \end{cases} \qquad \text{(t en s, r en mètre et θ en rad)}$$

1. $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ en fonction de $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



Par projection on obtient :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath} \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

2. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées polaires.

En coordonnées polaires : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r = e^t\vec{e}_r$

3. Le vecteur vitesse $\vec{V}$ et son module :

- Le vecteur vitesse $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r \quad \Longrightarrow \begin{cases} \dot{r} = e^t \\ \dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \end{cases} \quad et \;\; \dot{\theta} = 1 \quad \Longrightarrow \vec{V} = e^t(\vec{e}_r + \vec{e}_\theta)$$

- Le Module : $\|\vec{V}\| = e^t\sqrt{1^2 + 1^2} = e^t\sqrt{2}$

4. Le vecteur accélération $\vec{a}$ et son module

- Le vecteur accélération $\vec{a}$: $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \ddot{r} = e^t \\ \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r \end{cases} \quad \text{et} \quad \ddot{\theta} = 0 \Longrightarrow \vec{a} = (e^t - e^t)\vec{e}_r + 2e^t\vec{e}_\theta = 2e^t\vec{e}_\theta$$

- Le Module : $\|\vec{a}\| = \sqrt{(2e^t)^2} = 2e^t$

5. Déduire le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées cartésiennes.

On a: $$\begin{cases} x = r\cos\theta = e^t\cos t \\ y = r\sin\theta = e^t\sin t \end{cases} \quad \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = e^t(\cos t\,\vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath})$$

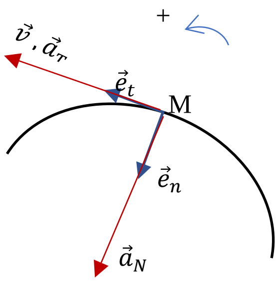
Exercice 2/

Solution/

$\vec{r} = 3\cos 2t\,\vec{\imath} + 3\sin 2t\,\vec{\jmath} + (8t-4)\vec{k}$

Le vecteur vitesse est un vecteur tangent à la courbe (la trajectoire).

Le vecteur unitaire qui est tangent à la courbe est un vecteur porté par le vecteur vitesse. Notons que le vecteur unitaire en question est le vecteur tangentiel $\vec{e}_t$, donc :



$$\vec{e}_t = \frac{\vec{v}}{v}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = -6\sin 2t\,\vec{\imath} + 6\cos 2t\,\vec{\jmath} + 8\vec{k}$$

$$v = \sqrt{(-6\sin 2t)^2 + (6\cos 2t)^2 + (+8)^2} = \sqrt{36(\sin^2 2t + \cos^2 2t) + 64} = 10\ (m/s)$$

$$\vec{e}_t = \frac{-6\sin 2t\,\vec{\imath} + 6\cos 2t\,\vec{\jmath} + 8\vec{k}}{10} \Rightarrow \boxed{\vec{e}_t} \boxed{= -0{,}6\sin 2t\,\vec{\imath} + 0{,}6\cos 2t\,\vec{\jmath} + 0{,}8\vec{k}}$$

Exercice 3/ Solution :

$$\begin{cases} r = \frac{t^2}{4} \\ \theta = \frac{\pi}{4}t \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{r} = \frac{t}{2} \\ \dot{\theta} = \frac{\pi}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{r} = \frac{1}{2} \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

1/ exprimons les vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées polaires

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = \frac{t^2}{4}\overrightarrow{e_r}}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \frac{t}{2}\vec{e}_r + \frac{\pi}{16}t^2\vec{e}_\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{64}t^2\right)\vec{e}_r + \frac{\pi}{4}t\vec{e}_\theta}$$

2/ calculons le module du vecteur vitesse et accélération à t=6s.

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{16}t^2\right)^2}$$

$$v(t=6s)=\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2+\left(\frac{\pi}{16}(6)^2\right)^2}\quad\Rightarrow\quad\boxed{v(t=6s)=7{,}68\ (m/s)}$$

$$a(t)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{64}t^2\right)^2+\left(\frac{\pi}{4}t\right)^2}$$

$$a(t=6s)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{64}(6)^2\right)^2+\left(\frac{\pi}{4}(6)\right)^2}\quad\Rightarrow\quad\boxed{a(t=6s)=6{,}91\ \ (m/s^2)}$$

3/ Les coordonnées cartésiennes du point M sont :

On a : $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{cases}x=\frac{t^2}{4}\cos\frac{\pi}{4}t\\ y=\frac{t^2}{4}\sin\frac{\pi}{4}t\end{cases}}$

4/ Déduisons l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes.

$$\vec{v}(t)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\begin{cases}v_x=\dfrac{dx}{dt}\\ v_y=\dfrac{dy}{dt}\end{cases}$$

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{4}\cos\frac{\pi}{4}t\right)=\frac{t}{2}\cos\frac{\pi}{4}t-\frac{\pi}{16}t^2\sin\frac{\pi}{4}t$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{4}\sin\frac{\pi}{4}t\right)=\frac{t}{2}\sin\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{16}t^2\cos\frac{\pi}{4}t$$

$$\boxed{\vec{v}(t)=\left(\frac{t}{2}\cos\frac{\pi}{4}t-\frac{\pi}{16}t^2\sin\frac{\pi}{4}t\right)\vec{i}+\left(\frac{t}{2}\sin\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{16}t^2\cos\frac{\pi}{4}t\right)\vec{j}}$$

Exercice 4/

Solution

$$\begin{cases}x=2cos(\ 3t\ +\ 2)\ \rightarrow\ (1)\\ y=2sin\ (3t+2)\ \rightarrow\quad(2)\end{cases}$$

1) Donnons l'équation de la trajectoire, quelle est sa nature ?

$$(1)^2+(2)^2\Rightarrow x^2+y^2=4cos^2(3t\ +\ 2)+4sin^2\ (3t+2)$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=4\,\underbrace{[cos^2(\ 3t\ +\ 2)+sin^2\ (3t+2)]}_{=1}$$

$$\Rightarrow\boxed{x^2+y^2=4}$$

C'est l'équation d'un cercle de centre $c(0,0)$ et de rayon $R = 2\ m$

2) Exprimons le vecteur vitesse $\vec{v}$ et son module.

On a : $\overrightarrow{OM} = 2cos(3t + 2)\vec{\imath} + 2sin\,(3t + 2)\vec{\jmath}$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}[2cos(3t + 2)]\vec{\imath} + \frac{d}{dt}[2sin\,(3t + 2)]\vec{\jmath}$$
$$= -6sin(3t + 2)\vec{\imath} + 6cos\,(3t + 2)\vec{\jmath}$$

$$\boxed{\vec{v} = 6[-sin(3t + 2)\vec{\imath} + cos\,(3t + 2)\vec{\jmath}]}$$

Son module v

$$\|\vec{v}\| = v = |6|\sqrt{\underbrace{[sin^2(3t + 2) + cos^2(3t + 2)]}_{=1}}$$

$$\boxed{v = 6\ (m/s)}$$

Vecteur accélération $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[-6sin(3t + 2)]\vec{\imath} + \frac{d}{dt}[6cos\,(3t + 2)]\vec{\jmath}$$
$$\vec{a} = -18cos(3t + 2)\vec{\imath} - 18\sin\,(3t + 2)\vec{\jmath}$$

$$\boxed{\vec{a} = -18[cos(3t + 2)\vec{\imath} + \sin\,(3t + 2)\vec{\jmath}]}$$

Son module a :

$$\|\vec{a}\| = a = |-18|\sqrt{\underbrace{[sin^2(3t + 2) + cos^2(3t + 2)]}_{=1}}$$

$$\boxed{a = 18\ (m/s^2)}$$

3) les coordonnées polaires du point M :

On sait que

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2\ m \\ \tan\theta = \dfrac{2sin\,(3t + 2)}{2cos\,(3t + 2)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} r = 2\ m \\ \theta = 3t + 2 \end{cases}}$$

4) le vecteur position, vitesse et accélération en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} r = 2 \\ \theta = 3t + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{r} = 0 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{e_r}}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}(t) = 6\,\vec{e}_\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} = -18\,\vec{e}_r}$$

Exercice 5/

Solution :

$$\overrightarrow{OM} = cos\ t\,\vec{\imath} + sin\ t\vec{\jmath}$$

1. Déterminons la nature de la trajectoire de M :

$$\begin{cases} x = cos\ t \\ y = \sin\ t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = cos^2\ t \\ y^2 = \sin^2\ t \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = cos^2\ t + \sin^2\ t = 1$$

La trajectoire est un cercle de rayon R = 1 m et de centre (0,0)

2. Exprimons le vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et déterminons son module :

Le vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{dt} = -\sin t\,\vec{\imath} + \cos t\,\vec{\jmath}$$

Le module de la vitesse est :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{sin^2 t + cos^2 t} \Rightarrow \|\vec{v}\| = 1\ m/s$$

3. la nature du mouvement et la vitesse angulaire ω :

La vitesse est constante donc le mouvement est circulaire uniforme.

La vitesse angulaire ω est constante :

$$\omega = \frac{v}{R} = 1\ rad\ /\ s$$

4. Exprimons le vecteur accélération en coordonnées cartésiennes et déterminons son module.

Le vecteur accélération en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{dt} = -\cos t\,\vec{\imath} - \sin t\,\vec{\jmath}$$

Le module de l'accélération est :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(-\cos t)^2 + (-\sin t)^2} = \sqrt{cos^2 t + sin^2 t} \Rightarrow \|\vec{a}\| = 1\, m/s^2$$

Que représente cette accélération dans le repère de Frenet et pourquoi ?

L'expression du vecteur accélération dans le repère de Frenet est donnée par :$\vec{a} = a_T\vec{e}_t + a_N\vec{e}_n$

L'accélération tangentielle est nulle $a_T = \frac{dv}{dt} = 0\, m/s^2$ (car $v = cte$ ou MCU)

Donc, cette accélération représente l'accélération normale a_N.

5. Déterminons l'angle α que fait l'accélération avec la vitesse :

Par le produit scalaire :

$$\begin{cases} \vec{a}.\vec{v} = \|\vec{a}\|.\|\vec{v}\|\cos\underbrace{(\vec{a},\vec{v})}_{\alpha} \\ \vec{a}.\vec{v} = (-\sin t).(-\cos t) + (\cos t)(-\sin t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \|\vec{a}\|.\|\vec{v}\|\cos\underbrace{(\vec{a},\vec{v})}_{\alpha}$$

Comme $\|\vec{a}\| \neq 0\ et\ \|\vec{v}\| \neq 0$, alors : $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = {}^{\pi}/_{2}$

Par le produit vectoriel :

$$\vec{a} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\cos t \times 0 - (-\sin t) \times 0)\vec{\imath} - \big((-\sin t) \times 0 - (-\cos t) \times 0\big)\vec{\jmath} + \big((-\sin t) \times (-\sin t) - (-\cos t) \times \cos t\big)\vec{k}$$

$= (\sin^2 t + \cos^2 t)\vec{k} = \vec{k} \Rightarrow \|\vec{a} \wedge \vec{v}\| = 1$

D'autre part :

$$\|\vec{a} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{a}\|.\|\vec{v}\|\sin(\vec{a},\vec{v}) = \sin(\vec{a},\vec{v}) \Rightarrow \alpha = {}^{\pi}/_{2}$$

6. Exprimons le vecteur vitesse et le vecteur accélération en coordonnées polaires :

En coordonnées polaires

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1\, m = R \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} = \tan t \Rightarrow \theta = t \end{cases}$$

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r = \vec{e}_r$

Vecteur vitesse :

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{v} = \vec{e}_\theta \quad / \ \dot{\theta} = 1 \ \text{ et } \ \ddot{\theta} = 0$$

Vecteur accélération :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\vec{e}_r$$

Ou par vecteurs :

$$\vec{v} = -\sin t\,\vec{\imath} + \cos t\,\vec{\jmath} = \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = -\cos t\,\vec{\imath} - \sin t\,\vec{\jmath} = -(\cos t\,\vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath}) = -\vec{e}_r$$

Exercice 6/

Solution :

Le mouvement d'un point matériel M se déplace dans le plan (xOy) est décrit par le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = 3\cos 2t\ \vec{\imath} + 3\ sin2t\,\vec{\jmath}$$

1/L'équation de la trajectoire de M :

$$\begin{cases} \mathrm{x} = 3\ cos\ 2\mathrm{t} \\ \mathrm{y} = 3\ sin\ 2\mathrm{t}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 3^2 cos^2 2t \\ y^2 = 3^2 sin^2 2t \end{cases}$$

Donc l'équation de la trajectoire $x^2 + y^2 = 3^2$est une équation d'un cercle de rayon R = 3 m et de centre O(0, 3).

2/Le vecteur vitesse :

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = -6\,sin\ 2t \\ v_y = \frac{dy}{dt} = 6\ cos\ 2t \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = 6\ (-sin\ 2\mathrm{t}\,\vec{\imath} + cos\ 2\mathrm{t}\,\vec{\jmath})$$

Son module est : $v = 6\ m/s$ donc le mouvement est circulaire uniforme.

3/ Le vecteur d'accélération :

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = -12\,cos\ 2t \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -12\ sin\ 2t \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = -12(cos\ 2\mathrm{t}\,\vec{\imath} + sin\ 2\mathrm{t}\,\vec{\jmath})$$

Son module est : $a = 12\ m/s^2$.

4/ la vitesse angulaire ω : $\omega = \dot{\theta} = \frac{v}{R} = \frac{6}{3} = 2\ rad/s$

La position angulaire $\theta(t)$: $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega\ dt \Rightarrow \theta = \omega t + \theta_0$

à $t = 0, \theta_0 = 0 \Rightarrow \theta(t) = 2t$ rad

5/ Le vecteur position, vitesse et accélération en coordonnées polaires :

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 3\ \ m$ et $tan\theta = \frac{y}{x} \rightarrow \theta(t) = 2t$ rad

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} = R\overrightarrow{e_r} = 3\overrightarrow{e_r} \\ \vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = R\omega\overrightarrow{e_\theta} = 6\overrightarrow{e_\theta} \\ \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = R\dfrac{d\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} = -R\omega^2\overrightarrow{e_r} = -12\overrightarrow{e_r} \end{cases}$$

Tels que : $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$, $\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}$ et $\dot{\theta} = \omega = 2\frac{rad}{s} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

6/ Le vecteur vitesse est perpendiculaire au vecteur accélération $\vec{v} \perp \vec{a}$ si le produit scalaire

$$\vec{v}.\vec{a} = 0$$

$$\vec{v}.\vec{a} = 6\,(-sin2\text{t}\,\vec{\imath} + \cos2\text{t}\,\vec{\jmath}).(-12\,(cos2\text{t}\,\vec{\imath} + sin2\text{t}\,\vec{\jmath}))$$

$$= -72\,(-sin2\text{t}\,cos2\text{t} + cos2\text{t}\,sin2\text{t}) = 0 \;\Rightarrow \vec{v}.\vec{a} = 0$$

$$\vec{v}.\vec{a} = v\,a\cos(\vec{v}.\vec{a}) \Rightarrow cos(\vec{v}.\vec{a}) = 0 \Rightarrow l'angle(\vec{v}.\vec{a}) = 90 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{a}$$

Ou bien : en coordonnée polaires : $\vec{v}.\vec{a} = \left(R\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}\right).\left(-R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{e_r}\right) = 0$

Exercice 7/

Solution/

$$\vec{V} = 2\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath}\text{ , A } t = 0\text{s} \Rightarrow \text{M}\,(0,3)$$

1 Le module de la vitesse :

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{\text{v}_\text{x}^2 + \text{v}_y^2} = \sqrt{4 + 4t^2} = 2\sqrt{1 + t^2}\;\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2 Le vecteur accélération $\vec{a}$ et son module :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(2\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath}) = 2\vec{\jmath} \quad\Rightarrow\quad \|\vec{a}\| = 2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

3 Déterminons le vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OM} = \int \vec{V}\,dt \;\Rightarrow \begin{cases} x = \int \text{v}_x dx \\ y = \int \text{v}_y dy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \int 2\,dx \\ y = \int 2t\,dy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t + C_1 \\ y = t^2 + C_2 \end{cases}$$

A $t = 0\text{s} \Rightarrow$ M $(0,3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 2(0) + C_1 \\ 3 = (0)^2 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 + 3 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = 2t\vec{\imath} + (t^2 + 3)\vec{\jmath}$$

4 L'équation de la trajectoire :

On a :

$$\begin{cases} x = 2t \Rightarrow t = \dfrac{x}{2} \\ y = t^2 + 3 \end{cases} \qquad \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2 + 3 \text{ (m)}$$

5 Les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération et le rayon de courbure de courbure pour t=1s.

- L'accélération tangentielle pour t=1s :

$$a_T = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{4 + 4t^2}\right) = \frac{8t}{2\sqrt{4 + 4t^2}} \Rightarrow a_T = \frac{4t}{2\sqrt{1 + t^2}} = \frac{2t}{\sqrt{1 + t^2}} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\text{à t} = 1\text{s} \Rightarrow a_T = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- L'accélération normale pour t=1s :

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N^2 = a^2 - a_T^2 = 4 - \frac{4t^2}{1 + t^2} = \frac{4 + 4t^2 - 4t^2}{1 + t^2}$$

$$a_N^2 = \frac{4}{1 + t^2} \Rightarrow a_N = \frac{2}{\sqrt{1 + t^2}} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad , \quad \text{à t} = 1\text{s} \Rightarrow a_N = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- Le rayon de courbure de courbure pour t=1s.

$$a_N = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{a_N} = \frac{4(1 + t^2)}{\dfrac{2}{\sqrt{1 + t^2}}} = 2(1 + t^2)\sqrt{1 + t^2} = 2(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$R = 2(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}, \qquad \text{à t} = 1\text{s} \Rightarrow R = 2(1 + 1^2)^{\frac{3}{2}} = 5.656 \text{ m}$$