Corrigé type de l'examen final (Prob Stat. 2024)

Exercice 1 (6pts)

a) Le nombre de mot de passe de 4 symboles distincts avec 20 caractères est $\mathbf{20!/16!}$ **(1pt)**:

b) Le calcul de la probabilité est défini comme une application de $\square\boldsymbol{Ensemble} \times [\mathbf{0},\mathbf{1}]$ **(1pt)**:

c) **Solution** Calculer par la méthode de régression linéaire (Moindre carré) les coefficients a et b .

$$y = b\,e^{a\cdot x} \Rightarrow ln(y) = a\cdot x + \ln(b) \Rightarrow a = \frac{Cov(x, ln(y))}{V(x)} \quad et\ ln(b) = \overline{\ln(y)} - a\cdot\bar{x} \quad \mathbf{(0.75pts)}$$

En appliquant la fonction logarithme népérien à y on obtient alors un nuage $(x, \ln(y))$

x	2	3	4	5	6
y	2,7	4,5	7,4	12,2	20,1
$ln(y)$	1	1,5	2	2,5	3

(0.5pts)

$$\bar{x} = \frac{2+3+4+5+6}{5} = 4 \quad et \quad \overline{\ln(y)} = \frac{1+1,5+2+2,5+3}{5} = 2 \quad \mathbf{(0.5pts)}$$

$$\begin{cases} V(x) = \frac{1}{5}(2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) - 4^2 = 2 & \mathbf{(0.5pts)} \\ Cov(x, ln(y)) = \frac{1}{5}(1\times 2 + 1,5\times 3 + 2\times 4 + 2,5\times 5 + 3\times 6) - 4\times 2 = 1 & \mathbf{(1pt)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} = 0,5 \Rightarrow ln(b) = \overline{\ln(y)} - a\cdot\bar{x} = 2 - 0,5\cdot 4 = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = e^{0,5x} \quad \mathbf{(0.75pts)}$$

Exercice 1:(8 pts)

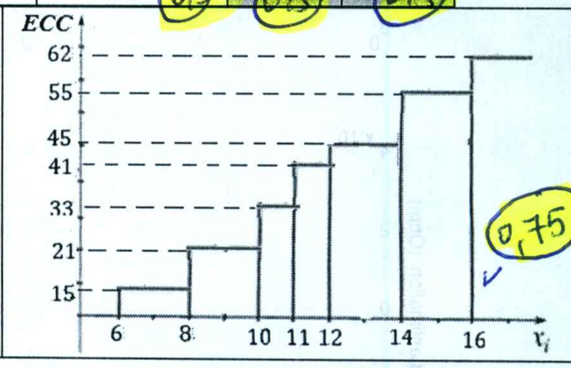
a) La ***population*** est *N=62jours*, ***Le caractère*** est le nombre de flacons Dior vendu par jour, ***quantitatif discret*** (***variable discrète***). Les ***modalités*** (ou ***valeurs***) sont **{6 ; 8 ; 10 ; 11; 12; 14 ; 16}.** 1 pt

Nombre de flacons vendu par jour x_i	**Effectif**	***Fréquence***	***ECC***	***ECD***
6	15	0.242	15	62
8	6	0.097	21	47
10	12	0.193	33	41
11	8	0.13	41	29
12	4	0.064	45	21
14	10	0.161	55	17
16	7	0.113	62	7
Total	**62**	1	0,5	0,5

0,5

➢ « ***au plus 10 flacons*** » d'après la colonne des ECC, l'effectif pour au plus 10 flacons est 33. 0,5

➢ « ***au moins 14 flacons*** » d'après la colonne des ECD, l'effectif pour au moins 14 flacons est 17. 0,25



0,75

e) Déterminer le mode Mo la médiane M_e, Q_1 et Q_3. **(1.75pts)**

- Le mode Mo correspond à x pour le plus grand effectifs (15) cela donne $Mo = 6$ **(0.25pts)**

$$\text{On a } N = 62 = 4\times k + 2 \Rightarrow k = 15$$

Le ***premier quartile*** Q_1 correspond à x pour l'élément de l'effectif cumulé $k+1 = 16$: Donc $Q_1 = x^{16} = 8.$ 0,5 pts

La **médiane** $\boldsymbol{M_e}$ correspond pour $n = 62$ a la moyenne entre l'élément 31 et 32 Donc $Q_2 = M_e = \frac{x^{31}+x^{32}}{2} = 10$ 0,5 pts

Le ***troisième quartile*** Q_3 correspond à x pour l'élément de l'effectif cumulé $3k+2 = 47$. Donc $Q_3 = x^{47} = 14$ 0,5 pts

f) Calculer la moyenne arithmétique $\bar{x}$, la variance et l'écart-type. **(2.25pts)**

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} n_i \cdot x_i = \frac{1}{62}(15\cdot 6 + 6\cdot 8 + 12\cdot 10 + 8\cdot 11 + 4\cdot 12 + 10\cdot 14 + 7\cdot 16) = \frac{646}{62} = 10.42 \ \textbf{(1pt)}$$

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} n_i \cdot x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{(15\cdot 6^2 + 6\cdot 8^2 + 12\cdot 10^2 + 8\cdot 11^2 + 4\cdot 12^2 + 10\cdot 14^2 + 7\cdot 16^2)}{62} - 10.42^2$$

$$= \frac{7420}{62} - 108.58 = 119.68 - 108.58 = 11.1 \ \textbf{(1pt)} \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{11.1} = 3.33 \textbf{(0.25pts)}$$

Exercice 3 : (6 pts)

On choisit un étudiant au Hasard, calculer

- A partir de l'énoncé si l'évènement

A_2 : L'étudiant choisit est de spécialité Automatique, alors La probabilité que l'étudiant choisit appartient à la spécialité Automatique et le pourcentage de A_2 qui correspond à $p(A_2) = 40\% = \frac{40}{100} = \frac{4}{10}$ **(0.75pts)**

Autre méthode : L'expérience est de choisir un étudiant parmi les 600 étudiants le nombre de résultat possible est 600 ? alors U : L'univers tel que $card(U) = 600$

A_2 : L'étudiant choisit est de spécialité Automatique, $card(A_2) = 600 \times 40\% = 240 \Rightarrow p(A_2) = \frac{240}{600} = \frac{4}{10}$

- Soit l'évènement B : L'étudiant choisi est un garçon, alors l'effectif de B correspond au nombre de garçon

$card(B) = 600(30\%\cdot 40\% + 40\%\cdot 30\% + 20\%\cdot 60\% + 10\%\cdot 20\%) = 228 \Rightarrow p(B) = \frac{card(B)}{card(U)} = \frac{228}{600} = \frac{19}{50}$ **(1pt)**

La probabilité que l'étudiant choisit est une fille est $p(\bar{B}) \Rightarrow p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{19}{50} = \frac{31}{50}$ **(0.25pts)**

- D'après l'énoncé on a

A_1 : L'étudiant est de spécialité Electronique, $p(A_1) = 30\% = \frac{3}{10}$ ou $p(A_1) = \frac{card(A_1)}{card(U)} = \frac{600\times 30\%}{600} = \frac{180}{600} = \frac{3}{10}$

A_2 : L'étudiant est de spécialité Automatique, $p(A_2) = 40\% = \frac{4}{10}$ ou $p(A_2) = \frac{card(A_2)}{card(U)} = \frac{600\times 40\%}{600} = \frac{240}{600} = \frac{4}{10}$

A_3 : L'étudiant est de spécialité Génie Biomédicale, $p(A_3) = 20\% = \frac{2}{10}$ ou $p(A_3) = \frac{card(A_3)}{card(U)} = \frac{600\times 20\%}{600} = \frac{120}{600} = \frac{2}{10}$ 0,5

A_4 : L'étudiant est de spécialité Télécommunication, $p(A_4) = 10\% = \frac{1}{10}$ ou $p(A_3) = \frac{card(A_4)}{card(U)} = \frac{600\times 10\%}{600} = \frac{60}{600} = \frac{1}{10}$

L'étudiant choisit est un garçon sachant qu'il est de spécialité Electronique, $p(B/A_1) = 40\% = \frac{40}{100} = \frac{4}{10}$

L'étudiant choisit est un garçon sachant qu'il est de spécialité Automatique, $p(B/A_2) = 30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$ 0,5

L'étudiant choisit est un garçon sachant qu'il est de spécialité Génie Biomédicale, $p(B/A_3) = 60\% = \frac{60}{100} = \frac{6}{10}$

L'étudiant choisit est un garçon sachant qu'il est de spécialité Télécommunication, $p(B/A_4) = 20\% = \frac{20}{100} = \frac{2}{10}$

- On cherche $p(A_1/B)$en utilisant le théorème de Bayes

$$p(A_1/B) = \frac{p(A_1)\cdot p(B/A_1)}{\sum_{j=1}^{4} p(A_j)\cdot p(B/A_j)} = \frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{10}}{\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{10} + \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{10} + \frac{2}{10}\cdot\frac{6}{10} + \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{10}} = \frac{12}{38} = \frac{6}{19}\, OU\, \frac{72 = card(A_1)\cdot 30\%}{228 = card(B)}$$ 1pt

- On cherche $p(A_3/\overline{A_4})$

$$p(A_3/\overline{A_4}) = \frac{p(A_3 \cap \overline{A_4})}{p(\overline{A_4})} = \frac{p(A_3) - p(A_3 \cap A_4)}{1 - p(A_4)} = \frac{p(A_3)}{1 - p(A_4)} = \frac{\frac{2}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{9}\, OU\, \frac{120 = card(A_3)}{540 = 600 - card(A_4)}$$ 2pts